Apprendre à raisonner
MATHS
6e

Mathieu Kieffer

2e édition

ellipses

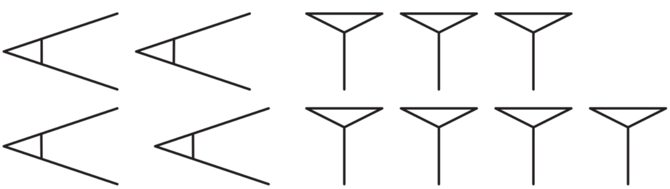
1

Nombres entiers naturels

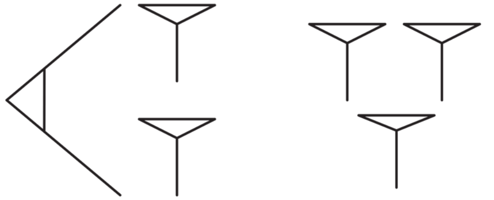
1.1 La numération mésopotamienne

La numération mésopotamienne est un système de numération en base soixante utilisé en Mésopotamie dès le III^{e} millénaire av. J.-C. Ce système y perdure en se perfectionnant, au moins jusqu'au III^{e} siècle av. J.-C. Il est ensuite repris par les civilisations grecques et arabes pour l'écriture des nombres en astronomie et il en reste quelques vestiges de nos jours dans le système horaire ou encore dans la mesure des angles en degrés, minutes, secondes. Ce système repose sur un compromis entre la base soixante et la base dix. Au cours de ces 3000 ans, plusieurs systèmes d'écriture ont cohabité dont un système de numération positionnelle savant de base soixante utilisant une notation à base de clous et chevrons et d'autres symboles particuliers aux nombres 1, 10, 60, 600, 3 600, 36 000, 216 000. Cette numération est partagée par les Babyloniens et les Akkadiens et provient de celle utilisée par les Sumériens.

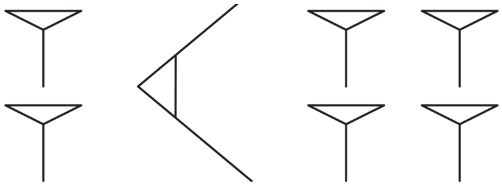
Exemple. Voici trois exemples d'écritures cunéiformes de nombres :



47



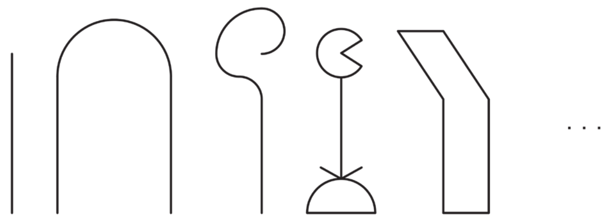
$(12 \times 60) + 3 = 723$



$(2 \times 3\,600) + (10 \times 60) + 4 = 7\,804$

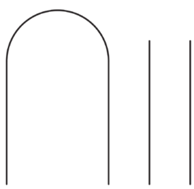
1.2 La numération égyptienne

Les Égyptiens de l'Antiquité utilisaient un système de numération décimal, mais dans lequel « zéro » n'existait pas. Chaque ordre de grandeur (unités, dizaines, centaines, etc.) possédait un signe répété le nombre de fois nécessaire. Autrement dit, il s'agit d'un système additif et non pas d'un système de position. Voici quelques hiéroglyphes utilisés par les scribes égyptiens pour représenter les différents ordres de grandeur :

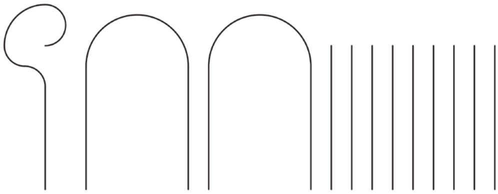


1 10 100 1 000 100 000

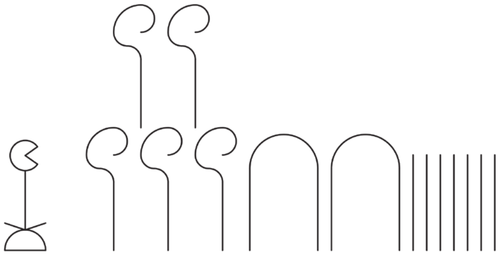
Exemple. Voici trois exemples d'écritures hiéroglyphiques de nombres :



12



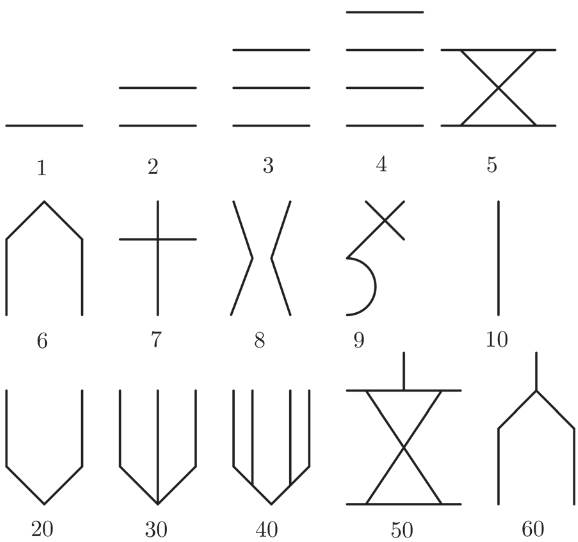
129



1 527

1.3 La numération chinoise

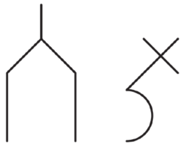
La numération chinoise sert à écrire des nombres en chinois. Elle est constituée de caractères chinois et remonte donc à la naissance de l'écriture chinoise, au III^{e} millénaire av. J.-C. C'est une numération qui se rapproche d'un système positionnel en base dix, où les principes de position et d'addition sont utilisés. Bien que la numération indo-arabe soit devenue d'usage courant en Chine, cette numération est encore utilisée de nos jours. Voici quelques symboles utilisés par les Chinois pour représenter différents ordres de grandeur :



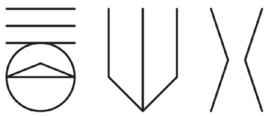
100 200 300 400 500

1 000 2 000 3 000 4 000 5 000

Exemple. Voici trois exemples d'écritures chinoises de nombres :



69



338

1 227

Remarque. Le zéro est un élément indispensable à toute opération mathématique. Sa découverte (ou son invention) revêt donc une importance historique. Avant d'être désigné par le symbole que nous connaissons tous, le zéro était représenté à l'origine par une place vide. À ce jour, les historiens semblent d'accord pour affirmer que l'emploi d'un espace vide pour le zéro fut inventé en Chine. En effet, on a discerné cet espace sur des tables de calcul chinoises qui remontent au moins au IV^e^ siècle avant J.-C. L'idée était simple : le nombre 405 s'écrivait : « quatre espace cinq », soit « quatre centaines, pas de dizaines, cinq unités ». Utilisé plusieurs siècles durant, il semble que les Chinois aient longtemps jugé l'espace vide parfaitement adéquat. Les historiens pensent que cet espace fut ensuite entouré d'un cercle, cercle qui serait l'ancêtre de notre actuel « 0 ».

1.4 La numération romaine

La numération romaine est un système de numération additive utilisé par les anciens Romains. Les nombres sont représentés à l'aide de symboles combinés entre eux, notamment par les signes I, V, X, L, C, D et M, appelés chiffres romains, qui représentent respectivement les nombres 1, 5, 10, 50, 100, 500 et 1 000. Ces « abréviations destinées à notifier et à retenir les nombres » ne permettaient pas à leurs utilisateurs de faire des calculs, qui étaient effectués au moyen d'abaques [1]. Un nombre écrit en chiffres romains se lit de gauche à droite. En première approximation, sa valeur se détermine en faisant la somme des valeurs individuelles de chaque symbole, sauf quand l'un des symboles précède un symbole de valeur supérieure ; dans ce cas, on soustrait la valeur du premier symbole à la valeur du second.

Exemple. Voici trois exemples d'écritures romaines de nombres :

XXVII
$10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 27$
DIX
$500 + 10 - 1 = 509$
CCXXXIV
$100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 5 - 1 = 234$

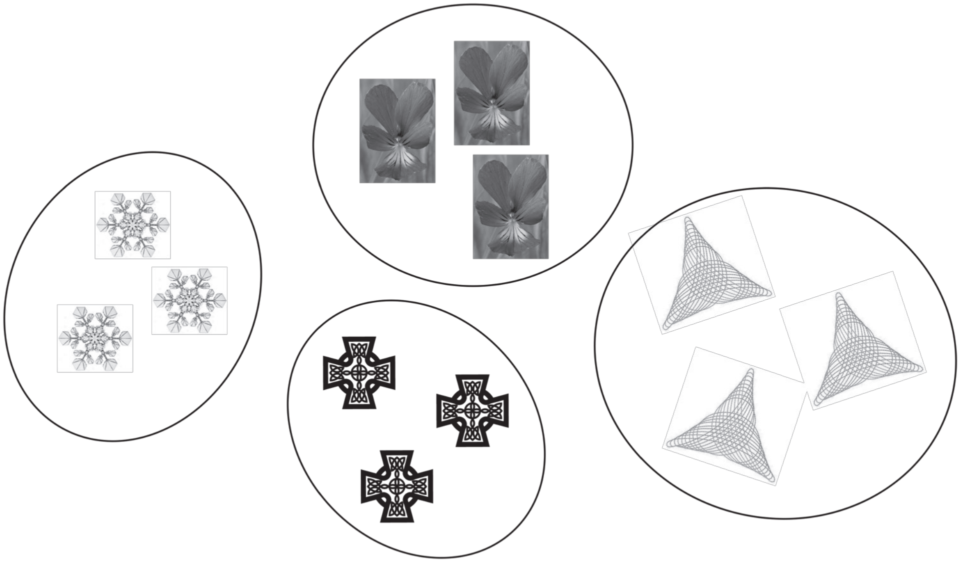
1.5 La notation décimale positionnelle

Nous l'avons vu, la numération positionnelle existe depuis le III^e^ millénaire avant J.-C. : les mathématiciens babyloniens utilisaient déjà un système de numération positionnel sexagésimal (i.e. en base 60). L'application de la notation positionnelle à un système décimal fut initiée par les Chinois dans leur numération chinoise au II^e^ siècle avant J.-C., puis finalisée vers l'an 500 de l'ère chrétienne par les brahmanes de l'Inde. Le système est décrit dans l'*Āryabhaṭīya*, un ouvrage indien, rédigé par Âryabhata et daté de 499, considéré comme l'équivalent indien de ce que seront les *Éléments* d'Euclide [2]. Dans l'Antiquité, on utilisait exclusivement de nombreux systèmes non-positionnels, dont l'exemple le plus connu est la numération romaine. Il est clair que, dans un tel système de notation, une simple opération comme une multiplication se révèle pratiquement impossible à effectuer sans abaque (boulier, tablettes de calcul à jetons, ou autre outil de calcul).

1. Abaque (d'*abacus* en latin et d'*abax* en grec signifiant « table à poussière ») est le nom donné à tout instrument mécanique plan facilitant le calcul.

2. Les *Éléments* est un traité mathématique constitué de treize livres organisés thématiquement, probablement écrit par le mathématicien grec Euclide vers 300 avant J.-C. Il s'agit du recueil mathématique qui a rencontré le plus de succès au cours de l'Histoire. En effet les *Éléments* furent l'un des premiers livres imprimés (à Venise, en 1482) et n'est très probablement précédé que par la Bible en ce qui concerne le nombre d'éditions publiées.

Remarque. Observons les ensembles ci-dessous :



Ils ont un point commun, abstrait, mais que notre cerveau détecte dès notre plus jeune âge. Il s'agit du concept de « trois », concept indépendant de la nature des objets présents « trois » fois. Ce concept, noté « 3 » de nos jours, est appelé un nombre entier naturel. On définit alors de manière similaire le concept de « quatre », « cinq », etc. Toutefois, en classe de Sixième, nous pouvons dans un premier temps accepter la définition suivante :

Définition 1. On appelle nombre entier naturel tout nombre auquel on peut aboutir en comptant sur ses doigts.

Exemple. 23 est un nombre entier naturel mais $51,8$ et $\frac{3}{4}$ ne sont pas des nombres entiers naturels.

Remarque. On peut en effectuer plusieurs :

1. Les nombres entiers naturels s'écrivent de nos jours à l'aide des dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, appelés chiffres indo-arabes.
2. Deux nombres entiers naturels qui se suivent sont dits consécutifs.
   Exemple : 132 et 133 sont consécutifs.
3. Les nombres entiers naturels peuvent également s'écrire en toutes lettres. À ce sujet, voici quelques règles d'orthographe qu'il convient de respecter :
   (a) « mille » est invariable ;
   (b) « vingt » et « cent » prennent un « s » lorsqu'ils sont multipliés et qu'ils terminent l'écriture d'un nombre ;
   (c) on utilise le trait d'union pour les nombres inférieurs à cent.

   Exemple : voici quelques exemples d'écritures en toutes lettres :

   2 781 : deux mille sept cent quatre-vingt-un.

700 : sept cents.

580 : cinq cent quatre-vingts.

Vocabulaire : nous l'avons dit, notre système d'écriture des nombres actuel est un système décimal dit « de position ». Cela signifie que la position d'un chiffre au sein de l'écriture d'un nombre revêt un rôle important. Un même chiffre ne renvoie pas à la même valeur selon le rang qu'il occupe au sein de l'écriture d'un nombre. Voici les noms de quelques rangs usuels :

Milliards			Millions			Milliers	Centaines	Dizaines	Unités
					4	0	0	6	9
	6	2	1	0	9	9	4	0	6
						7	4	2	0
5	1	3	0	6	0	8	1	4	5
		7	4	2	2	0	9	8	9

Remarque. Nous pouvons formuler plusieurs remarques :

1. Pour faciliter la lecture d'un nombre, on regroupe généralement les chiffres par paquets de trois. **Exemple** : 8 371 498.
2. La comparaison de deux nombres entiers naturels est rendue immédiate avec un tel système de position. En effet, en partant de la gauche, le premier chiffre qui diffère dans l'écriture des nombres comparés nous dit lequel des deux est le plus grand. **Exemple** : 4 382 et 4 391. Le premier chiffre qui diffère est celui des dizaines : $8 < 9$ donc $4\,382 < 4\,391$.
3. Tout nombre entier naturel peut alors se décomposer selon le rang de chacun de ses chiffres.
   Exemple : $47\,369 = 40\,000 + 7\,000 + 300 + 60 + 9$.

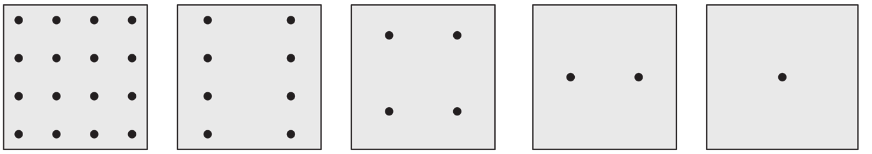
Définition 2. L'ensemble de tous les nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. On a donc : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots\}$.

Exemple. 2 022 est un nombre entier naturel, on écrit : $2\,022 \in \mathbb{N}$, qui signifie : « 2 022 appartient à l'ensemble des nombres entiers naturels ». En revanche $\frac{2}{5} = 0,4$ n'est pas un nombre entier naturel, on écrit : $\frac{2}{5} \notin \mathbb{N}$, qui signifie : « $\frac{2}{5}$ n'appartient pas à l'ensemble des nombres entiers naturels ».

Remarque. L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$ est infini. Pourquoi ? Supposons que n soit le plus grand nombre entier naturel que l'on puisse trouver dans $\mathbb{N}$. Alors considérons le nombre n auquel on ajoute 1. D'une part ce dernier nombre est bien un nombre entier naturel car nous avons compté un doigt supplémentaire et d'autre part il s'avère plus grand que n puisque nous avons ajouté 1. Par conséquent, n n'est pas le plus grand nombre entier naturel. De la sorte, il n'existe pas de tel nombre entier naturel plus grand que tous les autres.

1.6 Le système binaire

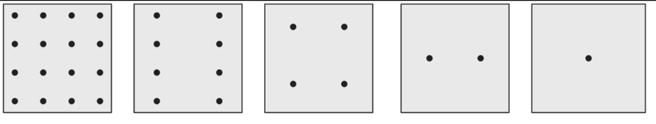
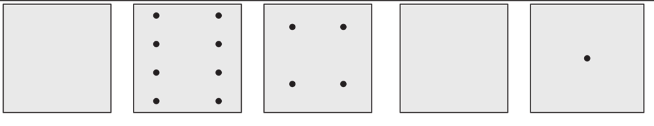
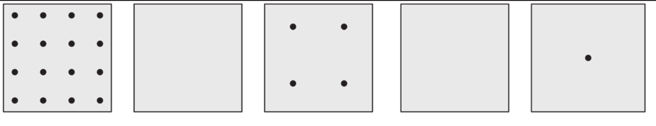
Voici un jeu de cinq cartes qui devront toujours être positionnées dans cet ordre :



Une carte peut être soit face visible, soit face cachée. Si la carte est face visible, alors nous comptons les points visibles, sinon, nous les ignorons. De plus, une carte face visible est notée « 1 » et une carte face cachée est notée « 0 » :

Face visible	Face cachée
1	0

Exemple. Voici quelques exemples de dispositions associées à leur valeur et leur codage :

Disposition	Valeur	Codage
	31	11111
	26	11010
	13	1101
	21	10101

Remarque. Nous pouvons effectuer plusieurs remarques :

1. Le lecteur se convaincra qu'à l'aide de ces cinq cartes, tous les nombres entiers naturels compris entre 0 et 31 sont atteignables. Par conséquent, chacun de ces nombres entiers naturels admet un codage utilisant les symboles « 0 » et « 1 ». Ce codage est communément appelé l'écriture binaire (du latin *binārĭus*, « double ») du nombre entier naturel.