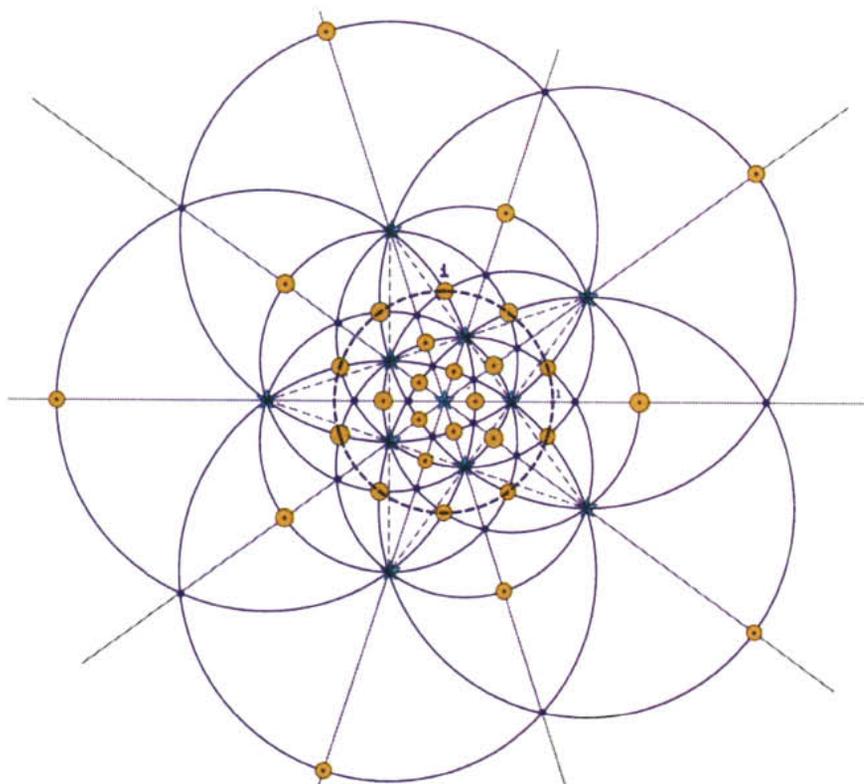


SURFACES DE RIEMANN ÉQUATION DE HALPHEN ET GROUPES POLYÉDRAUX

Groupes, algèbres et géométrie
Tome 3



Jean-Marie ARNAUDIÈS
José BERTIN



TABLE DES MATIÈRES

Chapitre XXII	Fractions rationnelles, fonctions algébriques	3
22.1	Transcendance	3
	Degré de transcendance	9
	Transcendance et isomorphismes	10
	Extensions transcendantes de degré de transcendance fini	12
	Corps de fonctions algébriques	13
	Transcendance et extension de scalaires	13
22.2	Dérivations	17
22.2.1	Introduction	17
22.2.2	Dérivations sur un anneau	17
	Extension d'une dérivation à un corps des fractions	18
	La formule de Leibniz	19
	Crochet de deux dérivations	19
22.2.3	Dérivations, polynômes et fractions rationnelles	20
22.2.4	Dérivations et séparabilité	21
	Bases de transcendance séparantes	23
	Noyau de certaines dérivations	31
22.3	Fractions rationnelles	33
22.3.1	Degré absolu d'une fraction rationnelle	33
22.3.2	Automorphismes de la K -algèbre $K(X)$	35
22.3.3	Le théorème de Lüroth	36
Chapitre XXIII	Ramification des corps de fonctions algébriques	
	d'une variable	39
23.1	Valuations	39
23.1.1	Généralités	39
	Indice de ramification	40
	Anneau d'une valuation, centre d'une valuation	40
	Propriétés de l'anneau d'une valuation	41
	Valuations au-dessus de K	43
	Anneaux de valuation discrète	44
	Signification de l'indice de ramification	49
	Surfaces de Riemann	50
23.1.2	Valuations des corps de fractions rationnelles d'une variable au-dessus du corps de base	50
	Application aux corps de fonctions algébriques d'une variable	52
	Ramification des corps de fractions rationnelles d'une variable	54
	Cas où le corps de base est algébriquement clos	57
	Homographies et sphère de Riemann	58
23.2	Compléments d'algèbre commutative	61
23.2.1	Le théorème des restes	61
	Application aux algèbres de dimension finie	62
23.2.2	Anneaux de fractions d'un anneau intègre	63
	Évitement des idéaux premiers	68
	Passage du local au global	68
	Obtention de certains anneaux principaux	69
23.2.3	Compléments sur la dépendance intégrale	70
23.2.4	Discriminant	73
	Résultant de deux polynômes d'une indéterminée	73

	Discriminant d'un polynôme d'une indéterminée	74
	Discriminant de certaines algèbres	75
	Discriminant, norme et théorie des corps	77
23.3	Valuations des corps de fonctions algébriques d'une variable	81
23.3.1	Extension de valuations discrètes	81
	Notion de paramètre local et de degré résiduel	82
23.3.2	Formules de ramification	84
	Application: fonctions algébriques	86
	Cas des corps de fonctions rationnelles d'une variable	88
23.3.3	Exemples de surfaces de Riemann	90
	Corps de fonctions hyperelliptiques	90
	Surface de Riemann définie par un polynôme en deux variables	92
23.4	Fonctions algébriques et théorie de Galois	97
23.4.1	Groupes de décomposition, groupes d'inertie	97
	Cyclicité des groupes de décomposition (K algébriquement clos)	101
23.4.2	Clôture galoisienne d'une extension finie séparable	102
23.4.3	Clôtures galoisiennes et ramification	103
	Corps composés et lemme d'Abhyankar	105
	Chapitre XXIV Le genre	109
24.1	Extension de scalaires	109
	Disjonction linéaire	109
	Dérivations et extension de scalaires	116
24.2	Diviseurs	117
24.2.1	Généralités	117
	Diviseurs principaux	117
	Diviseurs et isomorphismes	118
	Image directe et image réciproque d'un diviseur	119
	Exemple de diviseur de zéro non principal	121
	Les espaces $\mathcal{L}(D)$	122
24.2.2	Diviseurs et extension de scalaires	124
24.3	Dérivations et différentielles	125
24.3.1	Formes différentielles rationnelles	125
	Formes exactes	126
24.3.2	Classe canonique, genre	129
	Invariance du genre par K -isomorphismes	129
	Exemples de calcul du genre	130
24.3.3	Invariance du genre par extension des scalaires	132
	Extension algébrique des scalaires	132
	Extension transcendante pure des scalaires	136
	Invariance générale du genre en caractéristique nulle	140
24.3.4	La formule de Riemann-Hurwitz	141
	Image réciproque d'une forme différentielle	142
	Le diviseur de ramification	142
24.3.5	Exemple de calcul du genre en caractéristique non nulle	144
24.4	Théorème des résidus algébrique	149
24.4.1	Complétion	149
	Limites projectives	149
	Complétion associée à une valuation discrète	150
24.4.2	Développements de Taylor de fonctions algébriques d'une variable	154
	Complétion et sous-corps de fonctions algébriques	158

24.4.3	Résidus d'une forme différentielle	161
	Caractère intrinsèque des résidus	162
	Théorème des résidus pour un corps de fractions rationnelles	164
24.4.4	Théorème des résidus algébrique général	165
	Trace d'une forme différentielle	165
	Développement de Taylor d'une trace	166
24.4.5	Paramétrisations locales	173
24.4.6	Modèles projectifs	175
	Branches	176
24.5	Le théorème de Riemann-Roch	179
24.5.1	Adèles	179
24.5.2	Préliminaires d'algèbre linéaire	180
	Indice d'un couple de sous-espaces	181
24.5.3	Théorèmes de Riemann et de Riemann-Roch	182
	Formes K -linéaires sur les adèles et résidus	186
24.5.4	Premiers exemples d'application	190
24.5.5	Corps de genre un	193
	Couples de Weierstrass et invariant modulaire	195
	Structures de groupe associées à un corps de genre un	198
	Automorphismes d'un corps de genre un	201
24.5.6	Formule de Riemann-Hurwitz et théorie de Galois	204
	La borne de Hurwitz	205
	Chapitre XXV Surfaces de Riemann complexes	209
25.1	Revêtements	209
25.1.1	Homotopie, groupe fondamental	209
	Espaces simplement connexes	210
	Groupe fondamental	211
	Équivalences d'homotopie	214
25.1.2	Revêtements, relèvements	218
	Relèvements	221
	Relèvement d'homotopies	222
25.1.3	Opérations sur les revêtements	225
	Revêtement image réciproque	225
	Produit fibré de revêtements	227
	Composition de revêtements	228
	Produit cartésien de revêtements	229
25.1.4	Revêtements quotients, revêtements galoisiens	229
25.1.5	Groupe fondamental et revêtements	234
	L'action de monodromie	235
	Groupes de monodromie	237
25.1.6	Revêtements universels	240
	Clôture galoisienne d'un revêtement	243
	Groupe fondamental de la sphère de Riemann	244
25.1.7	Construction de revêtements galoisiens	246
25.2	La notion de surface de Riemann complexe	247
25.2.1	Rappels sur les fonctions méromorphes	247
25.2.2	Atlas analytiques	247
	Saturation d'un atlas analytique	251
	Sous-surfaces de Riemann	251
	La sphère de Riemann usuelle	252

	Rappels sur les fonctions holomorphes	253
	Cartes d'une surface de Riemann	254
	Multiplicité d'un zéro ou d'un pôle d'une fonction méromorphe	255
25.2.3	Applications analytiques	256
	Structure des applications analytiques	258
	Couple de cartes réduites	261
	Applications analytiques entre surfaces de Riemann compactes et connexes	261
25.3	Surfaces de Riemann algébriques	267
25.3.1	Corps de fractions rationnelles d'une variable sur \mathbb{C}	267
25.3.2	Topologie d'une surface de Riemann algébrique	268
25.3.3	Structure analytique	270
	Voisinages d'un point	274
	Cartes spéciales	275
	Signification topologique de l'indice de ramification	277
25.3.4	Connexité des surfaces de Riemann algébriques	279
25.3.5	Une propriété des discriminants	280
25.4	Théorèmes de séparation	283
25.4.1	Partitions de l'unité	283
25.4.2	Le lemme de Dolbeault	285
25.4.3	Fonctions holomorphes et convergence quadratique	287
	Cas d'un disque ouvert de \mathbb{C}	288
	Complétude des $\mathcal{H}^2(U)$	289
25.4.4	Cochânes de degré ≤ 1	291
	Raffinements d'un recouvrement ouvert fini	292
	Rappels sur les limites inductives d'espaces vectoriels	294
	Premier espace de cohomologie	296
25.4.5	Finitude de la dimension de certains espaces H^1	297
	Les $(0, 1)$ -formes d'une surface de Riemann	297
	Une propriété des espaces compacts	301
	Le théorème fondamental	302
25.4.6	Construction de fonctions méromorphes	307
25.4.7	Les $(1, 0)$ -formes d'une surface de Riemann	307
25.5	Le théorème de Riemann	313
25.5.1	Valuation définie par un point	313
	Surfaces de Riemann et corps de fonctions algébriques sur \mathbb{C}	314
	Convergence des développements de Taylor	317
	Différentielles, $(1, 0)$ -formes et résidus	318
25.5.2	Genre d'une surface de Riemann compacte et connexe	319
	Signification topologique du genre	319
25.5.3	Réalisation de certaines surfaces de Riemann	321
	Structure analytique sur la partie non singulière d'une courbe	321
	Application aux modèles projectifs non singuliers	322
25.6	Surfaces de Riemann et revêtements	325
	Surfaces de Riemann quotients	326
	Prolongement de certains revêtements en un morphisme	328
	Chapitre XXVI Surfaces de Riemann et théorie de Galois	333
26.1	Groupe fondamental et produits libres	333
26.1.1	Produit libre de groupes	333
26.1.2	Le théorème de Van Kampen	338
	Groupe fondamental des surfaces de Riemann compactes	346

26.2	Théorème de Galois inverse continu	347
	Préliminaires: indice d'un lacet dans le plan complexe	347
	Sphère de Riemann privée d'un nombre fini de points	348
	Corps hilbertiens	353
	La sphère moins trois points	355
	Chapitre XXVII Surfaces de Riemann et courbes planes	357
27.1	Notions sur les espaces projectifs	357
	Coordonnées homogènes	357
27.1.1	Sous-variétés linéaires projectives	358
27.1.2	Points fixes des homographies	358
27.1.3	Dualité	359
27.1.4	Complémentaire d'un hyperplan projectif	359
	Plongement d'un espace affine dans un espace projectif	360
27.1.5	Isomorphismes entre espaces projectifs	361
27.2	Hypersurfaces algébriques	363
27.2.1	Hypersurfaces algébriques affines	363
	Fonctions rationnelles sur une hypersurface algébrique affine irréductible	364
27.2.2	Hypersurfaces algébriques projectives	365
	Fonctions rationnelles sur une hypersurface projective irréductible	367
27.3	Points réguliers, points singuliers	369
27.3.1	Polynômes de Taylor	369
	Points réguliers et singuliers dans le cas projectif	370
27.3.2	La Hessienne	371
	Points d'inflexion d'une courbe algébrique projective irréductible	372
	Hypersurfaces projectives irréductibles et droites projectives	374
27.4	Lien entre l'anneau et le projectif	375
	Lien entre les corps de fonctions rationnelles	376
27.5	Courbes algébriques planes irréductibles	379
	Pôles des fonctions rationnelles	379
	Points simples et valuations discrètes	379
	Centre d'une valuation discrète	380
	Calcul du genre d'une courbe algébrique projective non singulière	382
	Différentielles régulières d'une courbe non singulière	384
27.6	Classification des cubiques projectives non singulières	385
27.6.1	Le théorème principal	385
27.6.2	Plans affines à neuf points	387
27.6.3	Homographies d'une cubique non singulière	389
27.6.4	Configurations de Hesse et groupe de Hesse	390
27.6.5	Sous-groupes de n -torsion d'une cubique non singulière	395
27.7	Compléments sur la droite projective	397
27.7.1	Le birapport	397
27.7.2	Classes de conjugaison des homographies d'une droite	400
27.7.3	Groupes finis d'homographies d'une droite projective	401
	Sous-groupes finis cycliques	402
	Sous-groupes finis diédraux non abéliens	402
	Sous-groupes finis diédraux abéliens, octaédraux et tétraédraux	403
	Sous-groupes finis icosaédraux	406
	Détermination de tous les sous-groupes finis d'homographies de la droite	406
	Orbites polyédrales sur le corps des complexes	408

27.8	Corps de genre zéro	411
27.8.1	Compléments sur l'extension des scalaires	411
	Actions du groupe de Galois $\text{Gal}(\overline{K}/K)$	412
27.8.2	Coniques associées à un corps de genre zéro	414
	Corps de genre zéro déployés	417
27.8.3	Classification des corps de genre zéro	417
	Lien avec les algèbres de quaternions	420
	Retour sur le théorème de Lüroth	421
27.9	Courbes planes et surfaces de Riemann complexes	423
27.9.1	Structure analytique des courbes planes non singulières	423
	Topologie des espaces projectifs complexes	423
	Continuité de l'application \mathcal{C} -centre et conséquences	423
27.9.2	Cubiques planes non singulières	425
	Surfaces de Riemann complexes compactes connexes paraboliques	425
	Les surfaces de Riemann compactes connexes de genre 1 sont paraboliques	428
Chapitre XXVIII Groupes polyédraux et équation de Halphen		431
28.1	Fractions rationnelles et théorie de Galois	431
28.1.1	Introduction	431
28.1.2	Invariants primitifs et orbites	432
	Conséquences en caractéristique nulle	435
28.1.3	Questions de rationalité	440
28.2	L'équation de Halphen	445
28.2.1	Introduction	445
28.2.2	L'équation de Halphen trigonométrique	445
28.2.3	Solutions réduites de l'équation de Halphen	446
	Homogénéisation	447
	Solutions régulières équivalentes	448
	Solutions primitives	449
	Triplets platoniciens	449
	Équation de Halphen et ramification	449
	Génération des solutions réduites par les solutions minimales	454
28.2.4	L'équation de Fermat	459
28.2.5	Retour à l'équation de Halphen générale	460
Bibliographie		461
Index de notations		463
Index d'auteurs cités		465
Index alphabétique		467