Annales
corrigées et commentées

Concours ECG

2021/2022/2023/2024

Maths appliquées

2e édition

Top 3 :

HEC/ESSEC I

ESSEC II

Roxane Duroux
Tom Dutilleul
Arnaud Jobin
Benoît Koechlin

ellipses

HEC/ESSEC-I 2021 : le sujet

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.
La **Partie** 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.
Les **Parties** 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question *17*, la **Partie** 3 est indépendante des **Parties** 1 et 2.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

× un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}_+$;

× une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J.

× une famille $(X_t)_{t \in J}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ et **indépendantes de** Y telles que pour tout $t \in J$:

$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$

$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t.

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$.
On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0, 1]$ par :

$$f_k(t) \ = \ \mathbb{P}(\,[X_t = k]\,)$$

1. *Un exemple avec **Scilab**.* On considère le script **Scilab** suivant :

```
function r = X(t)
r = 1
while rand() > ...
r = ...
end
endfunction

Y = rand()
Z = ...
disp(Z)
```

En considérant les notations précédentes avec $J =]0, 1[$ et en notant Y la variable aléatoire dont Y est une simulation, compléter le script précédent pour que Z soit une simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(Y)$.

- *Cas où Y est discrète.* On suppose dans les questions ***2.*** et ***3.*** que Y est discrète.

2. a) Soit $y \in Y(\Omega)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\,[Z = k] \cap [Y = y]\,) \ = \ f_k(y)\, \mathbb{P}(\,[Y = y]\,)$$

et si $\mathbb{P}(\,[Y = y]\,) \neq 0$:

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}(\,[Z = k]\,) \ = \ f_k(y)$$

b) En déduire :

$$\mathbb{P}(\,[Z=k]\,) \;=\; \mathbb{E}\big(f_k(Y)\big) \qquad (1)$$

c) *Un exemple où* $J=\mathbb{N}^*$. Soit $p\in\,]0,1[$. Si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et si la loi de Y est définie par, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(\,[Y=n]\,) \;=\; n\,p^2\,(1-p)^{n-1}$$

montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre p.

3. On suppose que pour tout $t\in J$, $\mathbb{E}(X_t)$ existe. On note $g(t)$ cette espérance et on suppose que $\mathbb{E}\big(g(Y)\big)$ existe.

a) Démontrer :

$$\mathbb{E}\big(g(Y)\big) \;=\; \sum_{y\in Y(\Omega)} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} k\,f_k(y)\;\mathbb{P}(\,[Y=n]\,)\right)$$

b) En admettant que l'on peut inverser l'ordre des sommes, montrer que $\mathbb{E}(Z)$ existe et :

$$\mathbb{E}(Z) \;=\; \mathbb{E}\big(g(Y)\big) \qquad (2)$$

- *On admet que les résultats établis dans les questions **2.** et **3.**, en particulier* (1) *et* (2)*, sont encore vrais lorsque* Y *n'est plus discrète.*

4. *Un premier exemple.* On suppose que $J=\,]0,1[$, que la loi de X_t est la loi géométrique de paramètre t et que Y suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\,[Z=k]\,)=\dfrac{1}{k\,(k+1)}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?

b) Que vaut $\mathbb{E}(X_t)$ en fonction de t ? Si l'on note g cette fonction de t, que peut-on dire de $\mathbb{E}\big(g(Y)\big)$?

5. *Un deuxième exemple.* On suppose que $J=[0,+\infty[$, que la loi de X_t est la loi de Poisson de paramètre t et que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$.
Par suite, Z suit la loi $\mathcal{P}\,(Y)$.
Par convention, la loi de Poisson de paramètre 0 est la loi de la variable aléatoire nulle.

a) Démontrer, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\,[Z=k]\,) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\,\lambda\,\mathrm{e}^{-(\lambda+1)\,t}\;dt \;=\; \frac{\lambda}{(\lambda+1)^{k+1}}\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\;\mathrm{e}^{-x}\;dx$$

b) En raisonnant par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$, justifier que pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\;\mathrm{e}^{-x}\;dx \;=\; 1$$

c) Déterminer la loi de Z. Reconnaître la loi de $Z+1$.

d) En déduire $\mathbb{E}(Z)$. Ce résultat est-il cohérent avec l'égalité (2) ?

Partie 2 - Le modèle de Cori

On considère une population d'effectif infini dans laquelle un individu donné est infecté le jour 0 par un virus contagieux.
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

× tout individu infecté par le virus est immédiatement contagieux et sa contagiosité ne dure que $(d+1)$ jours, du jour n où il est infecté jusqu'au jour $(n+d)$ $(n \in \mathbb{N})$;

× une fois infectés, les individus présentent un même profil de contagiosité donné par un $(d+1)$-uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ qui dépend généralement de facteurs biologiques.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on dit que α_k est la contagiosité de tout individu ayant éte infecté k jours plus tôt. Autrement dit, on peut considérer que α_k, lié à la nature du virus, détermine la proportion d'individus contaminés par un individu infecté, parmi tous ceux avec lesquels il est en contact k jours après sa contamination.

Finalement, les réels α_0, α_1, ..., α_d sont tels que, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $\alpha_k \in \,]0, 1[$ et on note $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{d} \alpha_k$, ce qui signifie que α est la contagiosité globale d'un individu infecté sur toute la période où il est infecté.
On utilise les notations et définitions de la **Partie 1** avec $J = \mathbb{R}^+$.
On suppose que les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la variable aléatoire qui désigne le nombre moyen de contacts réalisés le jour n par un individu contagieux ce jour-là.
  On suppose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\mathbb{E}(R_n)$ et on pose $r_n = \mathbb{E}(R_n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre total d'individus qui sont infectés et donc deviennent contagieux le n-ième jour. Par exemple, $Z_0 = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la variable aléatoire égale à la contagiosité globale de la population le n-ième jour, définie par :
$$I_n = \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k \, Z_{n-k} \qquad (*)$$
- On suppose enfin que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et R_n sont indépendantes et que si l'on pose $Y_n = R_n \, I_n$, on a :
$$Z_{n+1} \text{ suit la loi } \mathcal{P}(Y_n)$$
  où $\mathcal{P}$ désigne la loi de Poisson. Ainsi la loi de Z_{n+1} ne dépend que des lois de R_n et de I_n.

6. Donner une justification de $(*)$.

7. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{E}(I_n)$ existe. Montrer que $\mathbb{E}(Y_n)$ existe et en utilisant un résultat de la **Partie** 1, montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1})$ existe et vaut $r_n \, \mathbb{E}(I_n)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \mathbb{E}(Z_n)$ existe et vérifie la relation de récurrence :
$$z_{n+1} = r_n \sum_{k=0}^{\min(n,d)} \alpha_k \, z_{n-k} \qquad (3)$$

8. *Programmation de z_n avec **Scilab**.*
On suppose que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.
On note Δ la matrice ligne $(\alpha_0 \cdots\cdots \alpha_d)$.
Écrire une fonction **Scilab** d'entête `function r = z(Delta,n)` qui calcule z_n si `Delta` représente la matrice ligne Δ.

9. Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$, $(V_n)_{n\geqslant 0}$, deux suites d'événements tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(V_n) = 1$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(U_n \cap V_n) = 1$.

- On rappelle que l'on dit qu'un événement A est presque sûr lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$.

10. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \bigcap\limits_{k=n}^{+\infty} [Z_k = 0]$ et B l'événement « la contamination s'éteint au bout d'un nombre fini de jours ».

a) Démontrer : $\mathbb{P}(B) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

b) En distinguant les cas où $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$ est nulle ou pas, établir, pour tout $p \geqslant d$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+p} [Z_k = 0]\right) \;=\; \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$$

puis : $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{n+d} [Z_k = 0]\right)$.

c) En déduire que B est presque sûr si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\,[Z_n = 0]\,) = 1$.

d) Montrer que cela équivaut aussi au fait que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0.

11. ***a)*** Montrer, en utilisant un résultat de la **Partie 1**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(\,[Z_{n+1} = 0]\,) \;=\; \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{-Y_n}\right)$$

b) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$. En déduire que B est presque sûr (on pourra montrer que pour tout x reel, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$).

Partie 3 - Limite du nombre moyen de contaminations journalières

Dans cette partie, on conserve les notations de la **Partie 2** et on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation (3) et $z_0 = 1$, sous trois hypothèses différentes concernant la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour tout réel x, on identifie x et la matrice carrée d'ordre 1 dont l'unique coefficient est x.
Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, on pose $a_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha}$.

12. On suppose, dans cette question, qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho \in \,]0,1[$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n\,\alpha \leqslant \rho$.
On note (H_1) cette hypothèse.

a) Que vaut $\lim\limits_{t\to 1} \sum\limits_{k=0}^{d} a_k\, t^{d-k}$?

En déduire qu'il existe $\theta \in \,]0,1[$ tel que $\theta^{d+1} \geqslant \rho\left(\sum\limits_{k=0}^{d} a_k\,\theta^{d-k}\right)$ (on pourra raisonner par l'absurde).

- On pose $M = \max\limits_{k\in[\![N,N+d]\!]} \dfrac{z_k}{\theta^k}$.

b) Démontrer, pour tout $n \geqslant N$: $z_n \leqslant M\,\theta^n$.

c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$.

On montrerait de même que s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\rho > 1$ tels que, pour tout $n \geqslant N$, $r_n \, \alpha \geqslant \rho$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = +\infty$. On note (H_2) cette hypothèse.

- On suppose, dans les questions ***13.*** à ***16.*** , que **la suite** $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est constante de valeur** $\dfrac{1}{\alpha}$. On note (H_3) cette hypothèse.
  On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$U_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{n-d} \end{pmatrix}$$
  avec $z_{-1} = \ldots = z_{-d} = 0$.

13. ***a)*** Montrer quil existe une matrice A carrée d'ordre $d+1$, de première ligne $L = \begin{pmatrix} a_0 & \cdots \cdots & a_d \end{pmatrix}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A \, U_n$.

b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = A^n \, U_0$ puis que $z_{n+1} = L \, A^n \, U_0$.

14. Dans cette question, $d = 2$ et $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a) Démontrer : $\mathrm{Sp}(A) = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}$.

b) Déterminer une base (V_1, V_2, V_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où V_1 est un vecteur colonne propre de A pour la valeur propre 1, V_2 pour $-\frac{1}{2}$, V_3 pour $-\frac{1}{3}$, ces colonnes ayant leur premier coefficient égal a 1.

c) Déterminer $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, tel que $U_0 = s_1 \, V_1 + s_2 \, V_2 + s_3 \, V_3$.

d) En déduire que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers s_1.

15. On revient au cas général.

a) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\lambda^{d+1} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k} \, \lambda^k$ et que les sous-espaces propres de A sont de dimension 1.

b) Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le vecteur colonne propre associé V dont la somme des composantes vaut $d+1$.

c) Établir que $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ et que si $|\lambda| > 1$, alors $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$.

16. On pose pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $b_k = \sum\limits_{i=k}^{d} a_i$. On définit aussi le sous-espace vectoriel H de $\mathscr{M}_{d+1,1}(\mathbb{R})$ formé des matrices $W = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$ telles que $\sum\limits_{k=0}^{d} b_k \, w_k = 0$.

a) Démontrer, pour tout $W \in H$: $A \, W \in H$.

b) Déterminer l'unique réel s tel que : $U_0 - s \, V \in H$.

c) Nous admettons que, pour tout $W \in H$, $L \, A^n \, W \to 0$ quand $n \to +\infty$.
En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = s$.

17. Sous quelle(s) hypothèse(s), parmi les trois hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) faites dans cette partie, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$ est-elle convergente ? Comment interpréter ce résultat ?

HEC/ESSEC-I 2021 : le corrigé

Dans ce problème, on s'intéresse à un modèle, inspiré du modèle de Cori, de propagation d'un virus au sein d'une population.
La **Partie** 1 introduit des outils théoriques permettant de définir et d'étudier ce modèle.
Les **Parties** 2 et 3 concernent cette étude. Si l'on fait abstraction des définitions, des notations et de la question *17*, la **Partie** 3 est indépendante des **Parties** 1 et 2.

Partie 1 - Lois composées

On considère :

× un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et J un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}_+$;

× une variable aléatoire Y sur cet espace à valeurs dans J.

× une famille $(X_t)_{t\in J}$ de variables aléatoires sur cet espace **à valeurs dans** $\mathbb{N}$ et **indépendantes de** Y telles que pour tout $t \in J$:

$$X_t \text{ suit la loi } \mu(t)$$

$\mu(t)$ désignant une loi de probabilité de paramètre t.

On définit la variable aléatoire Z sur cet espace par :

$$\forall \omega \in \Omega, \text{ si } Y(\omega) = t \text{ alors } Z(\omega) = X_t(\omega)$$

et on dit que Z suit la loi $\mu(Y)$.
On considère dans cette partie une telle variable Z qui suit la loi $\mu(Y)$.

Commentaire

- Cet énoncé commence par l'introduction de la notion de « loi composée ». Comme il s'agit d'une notion qui n'est pas officiellement au programme de la filière, l'énoncé va consister à comprendre les mécanismes qui régissent celle-ci. De manière assez classique, l'énoncé va mêler questions théoriques permettant d'écrire les propriétés usuelles sur les lois composées et questions plus pratiques consistant à comprendre la notion en l'illustrant sur des cas particuliers. Ces dernières questions sont souvent l'occasion de démontrer toute sa maîtrise du cours. On reviendra sur ce point dans la suite du sujet.
- La notion de « loi composée » étant nouvelle, l'une des difficultés du sujet est de comprendre les objets introduits. En particulier, l'énoncé introduit :

  × Une v.a.r. Y à valeurs dans un ensemble J. Cela signifie :

  $$Y(\Omega) \subset J$$

  (les valeurs prises par Y sont des éléments de J)
  La valeur de cet ensemble n'est pas fixée et dépend de la v.a.r. Y d'étude. Plus précisément, cet ensemble prendra la valeur :

  (i) $J = \{0, 1\}$ si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

  (ii) $J = [\![0, n]\!]$ si $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.

  (iii) $J = \mathbb{N}^*$ si $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

  (iv) $J =]0, 1[$ si $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$.

  (v) $J = [0, +\infty[$ si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.

  (vi) ...

Commentaire

× La famille $(X_t)_{t\in J}$. C'est une manière générique d'écrire des objets relativement différents :

– Si J est un sous-ensemble fini de N, alors la famille $(X_t)_{t\in J}$ contient un nombre fini de variables aléatoires. Typiquement, dans le cas ***(i)***, $J = \{0, 1\}$ et on a alors affaire à une famille à deux v.a.r. notées X_0 et X_1.
Dans le cas ***(ii)***, on a affaire à une famille constituée de $n + 1$ v.a.r. $X_0, \ldots, X_n$.

– Si J est un sous-ensemble infini de N, alors la famille $(X_t)_{t\in J}$ contient un nombre infini dénombrable de variables aléatoires.
Typiquement, dans le cas ***(iii)***, $J = \mathbb{N}^*$ et la famille peut alors s'écrire sous la forme :

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

Une telle famille de variables aléatoires, indexée par un ensemble infini dénombrable, est tout simplement une suite de variables aléatoires.

– Si J est un sous-ensemble non dénombrable de réels, alors la famille $(X_t)_{t\in J}$ contient un nombre infini non dénombrable de variables aléatoires.
Typiquement, dans le cas ***(iv)***, $J =]0, 1[$ et la famille peut alors s'écrire sous la forme :

$$(X_t)_{t\in\ ]0,1[}$$

Une telle famille de variables aléatoires, indexée par un ensemble infini non dénombrable, est appelée un processus.

- Il est précisé ici que les variables de la famille $(X_t)_{t\in J}$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Cela signifie :

$$\forall t \in J,\ X_t(\Omega) \ \subset\ \mathbb{N}$$

(les valeurs prises par les v.a.r. de la famille $(X_t)_{t\in J}$ sont des éléments de N)
En particulier, les v.a.r. de la famille $(X_t)_{t\in J}$ seront donc toutes des v.a.r. discrètes.

- Il est par ailleurs précisé que, pour tout $t \in J$, la v.a.r. X_t suit une loi notée $\mu(t)$, notation générique pour désigner une loi qui dépend d'un paramètre t. Pour comprendre cette notation, on peut envisager les différentes valeurs possibles de l'ensemble J. Par exemple :

× si $J =]0, 1[$, on a affaire à un processus $(X_t)_{t\in\ ]0,1[}$. Pour tout $t \in]0, 1[$, la v.a.r. X_t suit une loi notée $\mu(t)$. Cette loi peut par exemple être $\mathcal{G}(t)$ ou $\mathcal{B}(t)$.

× si $J = \mathbb{N}^*$, on a affaire à une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la v.a.r. X_n suit une loi notée $\mu(n)$. Cette loi peut par exemple être $\mathcal{U}([\![0, n]\!])$ (cette loi dépend bien du paramètre n).

- Enfin, l'énoncé introduit la variable Z. Cette v.a.r. Z n'est autre que la v.a.r. X_Y (« X indice Y »). Plus précisément, il s'agit de la v.a.r. définie par :

$$\begin{array}{rcccl} Z & : & \omega & \mapsto & X_{Y(\omega)}(\omega) \\ & & \Omega & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

Le concepteur a souhaité éviter cette notation consistant à indicer une variable aléatoire par les valeurs prises par une autre variable aléatoire. On peut comprendre ce choix car la notation $X_{Y(\omega)}(\omega)$ peut sembler ardue de premier abord : elle signifie que $Z(\omega)$ (évaluation de la v.a.r. Z en ω) est le résultat de l'évaluation en ω de la v.a.r. $X_{Y(\omega)}$.

Une autre manière de présenter les choses est de dire que si Y prend une valeur t, alors la variable Z prend la valeur prise par la variable X_t. Le concepteur a décidé de mettre en avant que, pour tout $\omega \in \Omega$, « si $Y(\omega) = t$ alors $Z(\omega) = X_t(\omega)$ ». C'est une présentation un peu maladroite car la présence d'un « si … alors … » laisse penser que la v.a.r. Z serait définie par cas et que seul le cas $Y(\omega) = t$ serait présenté. Il n'en est rien. Le concepteur signale simplement que pour tout $\omega \in \Omega$, si **on note** $t = Y(\omega)$ alors $Z(\omega) = X_t(\omega)$.

Commentaire

- Il est à noter que l'on trouve parfois cette notion de v.a.r. indicée par une autre dans les sujets de concours. Dans le sujet `EML 2021`, on peut notamment lire :

  On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

  × *si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire ;*

  × *si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.*

  On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

  On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ et N sont mutuellement indépendantes. On définit la variable aléatoire $T = \max(X_1, \dots, X_N)$, ce qui signifie :

  $$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) \ = \ \max\big(X_1(\omega), \dots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$$

  Dans ce sujet `EML`, la v.a.r. N d'indiciation prend uniquement des valeurs entières. Cela rend certainement plus simple la compréhension de la notation $Z = X_N$: si N prend la valeur 3 (par exemple) alors Z prend la valeur prise par la v.a.r. X_3.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit aussi la fonction f_k de J dans $[0,1]$ par :

$$f_k(t) \ = \ \mathbb{P}(\,[X_t = k]\,)$$

Commentaire

- Il convient de faire la distinction entre :

  × f_k, qui est une fonction de J dans $\mathbb{R}$.

  × $f_k(t)$, image de t par la fonction f_k (résultat de l'évaluation de la fonction f_k au point t) qui est une quantité (un réel).

  Si l'on souhaite présenter une fonction par le résultat de son évaluation en chacun de ses points, il serait préférable d'utiliser un quantificateur. Dans ce cas, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dira que f_k est la fonction définie par : $\forall t \in J,\ f_k(t) = \mathbb{P}\big(\,[X_t = k]\,\big)$.

- Rappelons qu'une fonction est un mécanisme d'association. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k est définie par :

  $$f_k \ : \ \begin{array}{rcl} J & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f_k(t) = \mathbb{P}\big(\,[X_t = k]\,\big) \end{array}$$

1. *Un exemple avec* ***Scilab***. On considère le script **Scilab** suivant :

```
function r = X(t)
r = 1
while rand() > ...
r = ...
end
endfunction

Y = rand()
Z = ...
disp(Z)
```