MATHS APPROFONDIES INFORMATIQUE

ECG-2

Christophe FISZKA

- Le cours détaillé
- Plus de 460 exercices avec indications et solutions
- Les méthodes et pièges à éviter
- Le cours et travaux pratiques en Python

ellipses

CHAPITRE 1

Rappels et compléments d'algèbre linéaire

> *Die Mathematiker sind eine Art Franzosen : redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anderes.* [a]
>
> GOETHE
>
> Écrivain allemand (1749-1832)
>
> *a.* Les mathématiciens sont comme les Français : quoi que vous leur disiez, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.

Ce chapitre reprend le cours de première année en algèbre linéaire. La dernière partie complète ces rappels avec les notions de trace d'une matrice, de matrices semblables et de matrices de passage avec la formule de changement de bases.

1 Les espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels, familles de vecteurs

Pour résumer, un espace vectoriel E est un ensemble muni de deux lois « + » et « · » telles que :

- E est stable par multiplication à gauche par un nombre : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda \cdot u \in E$.
- E est stable par somme : $\forall u \in E, \forall v \in E, u + v \in E$.
- Il y a de « bonnes règles de calcul » entre les lois « + » et « · ».

Par exemple :

- $\forall u \in E, \quad 0 \cdot u = 0_E$ (le vecteur nul).
- $\forall u \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$.
- $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v \quad \text{et} \quad (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E$.
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall (u, v) \in E^2 : \quad \begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 0 \quad \text{alors} \quad \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Rightarrow u = v. \\ \text{Si } u \neq 0_E \quad \text{alors} \quad \lambda \cdot u = \mu \cdot u \Rightarrow \lambda = \mu. \end{cases}$

Les éléments de E sont des **vecteurs**.

Exemples de référence.

- $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel avec les lois + et · définies par
$\forall\, u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, v = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$$u + v = (x_1 + y_1\,,\, x_2 + y_2\,,\, \ldots\,,\, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda \times x_1 \ldots, \lambda \times x_n).$$

- L'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille (n, p) est un espace vectoriel pour les lois usuelles.
- Les ensembles $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ respectivement des applications polynomiales et des applications polynomiales de degré au plus n sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles.
- L'ensemble $\mathscr{A}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ des applications d'un ensemble I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels

Dans la suite, une famille finie de vecteurs de E est la donnée d'une liste finie $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ de vecteurs de E. Le cardinal de la famille est alors le nombre de vecteurs.

DÉFINITION (RAPPEL) **combinaison linéaire**

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
*On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$, tout vecteur v s'écrivant*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \quad \textit{avec pour tout } i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

On définit ensuite les sous-espaces vectoriels comme les parties (non vides) de E stables par combinaisons linéaires.

DÉFINITION (RAPPEL) **sous-espaces vectoriels**

Soient E *un espace vectoriel et* F *une partie de* E. F *est un **sous-espace vectoriel** de* E *si*

- F *est non vide.*
- F *est stable par somme, c'est-à-dire :* $\forall\,(u, v) \in \mathrm{F}^2, \quad u + v \in \mathrm{F}.$
- F *est stable par multiplication par un nombre, c'est-à-dire :* $\forall\, u \in \mathrm{F}, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in \mathrm{F}.$

Méthodes.

- Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, on se contente de vérifier que pour tout nombre λ et tous vecteurs u, v de F, $\lambda \cdot u + v \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \neq \varnothing$. Pour le second point, il suffit d'exhiber un élément de F, le plus simple étant 0_{E}.
- De plus, on démontre que tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Donc, en pratique, lorsqu'on souhaite prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$...)

PROPOSITION (RAPPEL) **intersection de sous-espaces**

Soient F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Alors l'intersection* $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Attention. En général, c'est faux pour la réunion.

DÉFINITION (RAPPEL) **sous-espace vectoriel engendré par une partie finie**

Soient E *un espace vectoriel et* X *une partie finie de* E.
L'espace vectoriel engendré par X *est défini par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de* X. *On le note* Vect(X). *Autrement dit, si* $X = \{u_1, \ldots, u_n\}$, *alors*

$$\mathrm{Vect}(X) = \left\{ v \in E \;\middle|\; \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i \right\}.$$

Remarques.
• Comme son nom l'indique, Vect(X) est un sous-espace vectoriel de E. En particulier, il contient le vecteur nul.
• Un espace vectoriel engendré par un vecteur non nul est une **droite vectorielle**. Un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires est un **plan vectoriel**.

Familles génératrices, libres et bases

DÉFINITION (RAPPEL) **famille libre finie**

Soit E *un espace vectoriel, on dit que la famille* $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_m)$ *de vecteurs de* E *est une* ***famille libre*** *si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire à coefficients nuls. Autrement dit,*

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot u_i = 0_E \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in [\![1, m]\!], \quad \lambda_i = 0 \right).$$

Remarque. Soit $(u, v) \in E^2$. La famille (u, v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v sont non colinéaires.

Exemple. Dans les cas des polynômes : une famille finie $(Q_1, \ldots, Q_r)$ de $\mathbb{R}[x]$ est une famille libre si elle est de **degrés échelonnés**. C'est-à-dire,

$$0 \leqslant \deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \cdots < \deg(Q_r).$$

Exercice 1. ✦ **Exemples**

1. Dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est libre où

$$\varepsilon_1 = (3, -1, 1, 0), \quad \varepsilon_2 = (1, 1, -1, 0), \quad \varepsilon_3 = (-1, 2, 1, 0) \quad \text{et} \quad \varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1).$$

2. À quelle condition sur le polynôme P, la famille $\left(P^{(k)}\right)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[x]$?

3. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Justifier que la famille (A, B, C, D) est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Que dire de la liberté de la famille (A, B, C, D, I_2) ?

4. ✦✦ Dans les espaces fonctionnels. Étudier la liberté des familles suivantes.

   a) La famille $\mathscr{F} = \left(\tan, \tan^2, \ldots, \tan^n\right)$ dans $\mathscr{A}\left(\left]-\pi/2, \pi/2\right[, \mathbb{R}\right)$.

   b) La famille $\left(f_i\right)_{\in[\![0;n]\!]}$ où $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto |x-i| \in \mathbb{R}$ dans $\mathscr{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

DÉFINITION (RAPPEL) — **famille génératrice finie**

Soit $\mathscr{G} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{G}$ est une ***famille génératrice*** *de* E*, si tout vecteur de* E *peut s'obtenir par combinaison linéaire à partir des vecteurs de $\mathscr{G}$. Autrement dit si,*

$$\text{Pour tout vecteur } v \in \mathrm{E}, \text{ il existe } \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot u_i.$$

Remarque. Sous forme condensée, $\mathscr{G}$ est génératrice de E si $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = \mathrm{E}$.

Exercice 2

✦ Dans chacun des cas, donner une famille génératrice de l'espace vectoriel.

1. $\mathrm{F} = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = z\right\}$.
2. G : l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n de degré impair.
3. H : l'espace des matrices symétriques de taille 3.

p. 38

DÉFINITION (RAPPEL) — **base**

On appelle ***base*** *d'un espace vectoriel* E*, toute famille libre et génératrice de* E.

Exemples. Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

- La famille $(e_i)_{i=1,\cdots n}$ où $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec 1 en i-ème position est une base de $\mathbb{R}^n$.
- La famille $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- La famille des matrices élémentaires $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour rappel, la matrice élémentaire $\mathrm{E}_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0, sauf un 1 en position (i, j).

PROPOSITION (RAPPEL) — **coordonnées d'un vecteur dans une base**

Soient E *un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de* E*. Les énoncés suivants sont équivalents.*

i) *La famille $\mathscr{B}$ est une base de* E.

ii) *Pour tout vecteur v de* E*,*
il existe un unique n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i$.

Dans ce cas, $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les ***coordonnées de*** *v* ***dans la base*** *$\mathscr{B}$.*

1.2 Rappels : sommes de deux s.e.v et supplémentaires

DÉFINITION (RAPPEL) **somme de sous-espaces, somme directe**

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E.

- ***Le sous-espace somme*** *est défini par* $\mathrm{F}+\mathrm{G} = \left\{u+v \,\middle|\, (u,v) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G}\right\}$.
- *On dit que* F *et* G *sont en* ***somme directe****, notée* $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$*, si* $\mathrm{F}\cap\mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$.

Remarques.

- $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G.
- On montre l'équivalence entre F et G sont en somme directe et

$$\forall\, u \in \mathrm{F},\quad v \in \mathrm{G},\qquad u+v = 0_\mathrm{E} \quad\Rightarrow\quad u = v = 0_\mathrm{E}.$$

PROPOSITION (RAPPEL) **unicité de la décomposition**

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) *Les sous-espaces* F *et* G *sont en somme directe.*

ii) *Tout vecteur* $u \in \mathrm{F}+\mathrm{G}$ *s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$u = u_\mathrm{F} + u_\mathrm{G} \quad \textit{avec} \quad u_\mathrm{F} \in \mathrm{F},\quad u_\mathrm{G} \in \mathrm{G}.$$

DÉFINITION (RAPPEL) **supplémentaire**

Soient E *un espace vectoriel et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
On dit que F *et* G *sont* ***supplémentaires*** *si tout vecteur de* E *se décompose de façon unique en une somme d'un vecteur de* F *et d'un vecteur de* G. *C'est-à-dire*

$$\forall\, w \in \mathrm{E},\quad \exists!\,(u,v) \in \mathrm{F}\times\mathrm{G},\quad w = u+v.$$

⚠ **Attention.** Il n'y a pas unicité du supplémentaire et il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarque. Le raisonnement par analyse-synthèse est particulièrement adapté à cette définition.

Exercice 3

✦✦ **Exemples**

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\right\}$, $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (1,1,1)$.
   Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1)$ et $\mathrm{Vect}(u_2)$ sont deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^3$.
2. ✎ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. p. 38
   Posons $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ les sous-espaces vectoriels des matrices symétriques et antisymétriques de taille (n,n). Justifier que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont supplémentaires.
   Rappels : A *est symétrique si* ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$*, antisymétrique si* ${}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}$.

PROPOSITION (RAPPEL) **caractérisation des supplémentaires**

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Les énoncés suivants sont équivalents.*

i) *Les sous-espaces* F *et* G *sont supplémentaires.*

ii) $F \cap G = \{0_E\}$ *et* $F + G = E$.

On a donc : F *et* G *sont supplémentaires si et seulement si* $F \oplus G = E$.

1.3 Rappels : précisions en dimension finie

Lorsqu'un espace vectoriel E est de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la dimension de E.

Exercice 4

✧ ✎ Donner une base des espaces vectoriels suivants, préciser la dimension.

$$E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a+b+c+d=0 \right\},$$

p. 39

$$E_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \mid P'(1) = 0\} \quad \text{et} \quad E_3 = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ est diagonale}\}.$$

PROPOSITION (RAPPEL) **cardinal d'une famille libre/génératrice**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* $\mathscr{L}$, $\mathscr{G}$ *deux familles de* E.

Si
- *La famille* $\mathscr{L}$ *est libre.*
- *La famille* $\mathscr{G}$ *est génératrice de* E.

Alors $\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leqslant \dim(E)$ *et* $\dim(E) \leqslant \mathrm{Card}(\mathscr{G})$.

Remarque. La preuve du premier point est basée sur le *théorème de la base incomplète*. En dimension finie, on peut compléter toute famille libre de vecteurs de E en une base de E. Pour le second point, on montre que l'on peut extraire une base de E de n'importe qu'elle famille génératrice de E.

PROPOSITION (RAPPEL) **cas d'égalité**

Soit E *un espace de dimension finie.*

- *Une famille libre* $\mathscr{L}$ *de cardinal* $\dim(E)$ *est une base.*
- *Une famille génératrice* $\mathscr{G}$ *de cardinal* $\dim(E)$ *est une base.*

PROPOSITION (RAPPEL) — **existence d'un supplémentaire**

Soit E *un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de* E *admet un supplémentaire.*

Remarque. Concaténation de bases
Soient $\mathscr{B}_{\mathrm{F}} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{G}} = (f_1, \dots, f_r)$ des bases respectivement de F et G. On montre que si F et G sont en somme directe, alors $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. En particulier, on en déduit que

$$\dim(\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}).$$

THÉORÈME (RAPPEL) — **formule de Grassmann**

Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E. *Alors,*

$$\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}).$$

PROPOSITION (RAPPEL) — **caractérisation des supplémentaires**

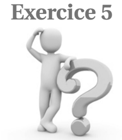
Soient E *un espace vectoriel de dimension finie et* F, G *deux sous-espaces vectoriels de* E.
Les trois énoncés suivants sont équivalents.

i) F *et* G *sont supplémentaires.*

ii) $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \mathrm{E}$ *et* $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{E})$.

iii) $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_{\mathrm{E}}\}$ *et* $\dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{E})$.

Exercice 5



✦✦ Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, $u = (a_1, a_2 \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et

$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u) \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0 \right\}.$$

p. 40

1. F et G sont des s.e.v de $\mathbb{R}^n$, préciser les dimensions de F et G.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. Représenter dans le plan les sous-espaces vectoriels F et G lorsque $u = (1, 1)$.

1.4 Compléments : sommes de p sous-espaces vectoriels

Sommes de sous-espaces vectoriels

DÉFINITION — **somme de s.e.v**

Soient $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$*, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E.

On appelle ***somme*** *de* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$*, l'ensemble* $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i = \left\{ u_1 + \cdots + u_p \mid \forall\, i \in [\![1; p]\!],\ u_i \in \mathrm{F}_i \right\}$.

Exemples.

- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$. Notons $\mathcal{T}^+$, $\mathcal{T}^-$ et $\mathcal{D}$ respectivement l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes et diagonales de taille (n,n). Ces trois ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T}^+ + \mathcal{T}^- + \mathcal{D}$. En effet, pour $(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in\mathcal{T}^+} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\in\mathcal{T}^-} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}}_{\in\mathcal{D}}.$$

- Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$\text{Vect}\left(e_1, e_2, \ldots, e_p\right) = \text{Vect}(e_1) + \text{Vect}(e_2) + \ldots + \text{Vect}(e_p).$$

Exercice 6

✧ Soient $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$, des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ est bien un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit H, un sous-espace vectoriel de E tel que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{F}_i \subset \mathrm{H}$.
   Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i \subset \mathrm{H}$.

p. 40

PROPOSITION — **somme et dimension**

Soient $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$, *des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E.
Si *les* F_i *sont tous de dimension finie,* ***alors*** $\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i$ *est aussi de dimension finie avec*

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{F}_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(\mathrm{F}_i).$$

Preuve. Rappelons que, d'après la formule de Grassmann, pour F, G deux s.e.v de E de dimension finie

$$\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G}) \leqslant \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) \qquad \text{car} \quad \dim(\mathrm{F}\cap\mathrm{G}) \geqslant 0.$$

La proposition s'en déduit par récurrence. ■

Sommes directes, généralisation à p sous-espaces vectoriels

DÉFINITION — **somme directe**

La somme de p sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$ *d'un espace vectoriel* E *est dite* ***directe*** *si*

$$\forall\, (u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p, \qquad u_1 + \cdots + u_p = 0_{\mathrm{E}} \quad \Rightarrow \quad u_1 = \cdots = u_p = 0_{\mathrm{E}}.$$

La somme directe des s.e.v $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_p$ *est notée* $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{F}_p$.