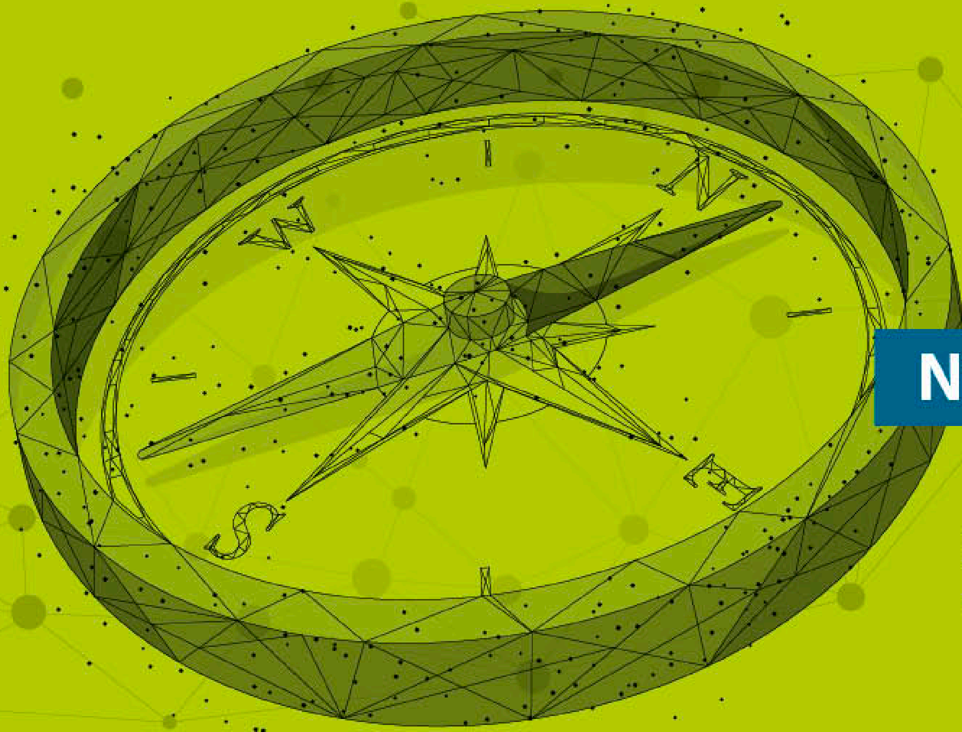


Niveau 2^{de}

Éric Dubon
Francisco del Rey

Mathématiques d'excellence

Cours pour lycéens très motivés

2e édition

ellipses

Chapitre 1

De quoi parlons-nous ?

Sommaire

1.1 Le vrai et le faux

En mathématiques, on n'utilise que des phrases qui ne peuvent être que vraies ou fausses, sans ambiguïté. La phrase : « La Loire prend sa source au Mont Gerbier de Jonc » n'est pas une phrase mathématique. Il faudrait délimiter sans ambiguïté ce qu'est le Mont Gerbier de Jonc et définir ce qu'est une source d'un fleuve. De plus cette phrase suppose l'unicité de la source. Rappelons qu'on considère traditionnellement trois sources pour la Loire : l'authentique, la véritable et ... l'unique.

Une phrase mathématique s'appelle une **proposition**.

Ce qui suit peut s'appeler de la logique, ou du français, ou tout simplement du bon sens.

Définition 1 (Théorème)**.**

On appelle **théorème** toute proposition pour laquelle on peut prouver qu'elle prend la valeur « Vrai ». Autrement dit, « théorème » est une **abréviation** pour « proposition qui prend la valeur " Vrai " d'une façon **certaine** ».

La notation := sera utilisée par la suite dans les écritures symboliques. Elle signale une abréviation. Autrement dit, := est une abréviation pour « est une abréviation de » ...

1.2 La négation

La **négation** d'une phrase vraie est fausse. La négation d'une phrase fausse est vraie. On considère une proposition qu'on appelle A. Sa négation sera notée : non A. On peut résumer la négation d'une proposition grâce à un tableau :

A	non A
VRAI	FAUX
FAUX	VRAI

Exemple 1
Soit x un nombre relatif. La négation de la proposition : « $x > 0$ » est tout d'abord la proposition : non(« $x > 0$ »).

On peut affirmer dans ce cas précis, que non(« $x > 0$ ») prend la même valeur logique que la proposition « $x \leqslant 0$ » et ce quel que soit le nombre relatif x.

1.3 La conjonction

Définition 2.

À partir de deux propositions A, B, on peut définir une troisième proposition appelée A et B. Elle prend la **valeur logique** Vrai dans le cas où les propositions A, B sont vraies à la fois, et Faux sinon. On obtient ainsi la **table de vérité** suivante :

A \ B	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Faux
Faux	Faux	Faux

Exemple 2
« 6 est divisible par 2 et 6 est divisible par 3 » est une proposition vraie.

Exemple 3
« Un carré est un rectangle et un losange » est une proposition vraie. C'est même la définition d'un carré. Autrement dit, pour une figure $\mathscr{F}$ du plan, « $\mathscr{F}$ est un carré » est une abréviation de « $\mathscr{F}$ est un rectangle » et « $\mathscr{F}$ est un losange ».

1.4 La disjonction

Définition 3.

À partir de deux propositions A, B, on peut définir une troisième proposition appelée A ou B. Elle prend la valeur logique Faux dans le cas où les deux propositions A, B sont fausses à la fois, et vraie sinon. On obtient ainsi la table de vérité suivante :

A \ B	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Vrai	Faux

Exemple 4
Soit x un nombre relatif. Dire que $x \leqslant 0$ c'est dire que $x < 0$ ou $x = 0$.

1.5 Négation de « et » et de « ou »

La négation d'un « et » peut se traduire par un « ou ». Plus précisément :

Théorème 1

- Une négation de « A et B » est « (non A) ou (non B) ».
- Une négation de « A ou B » est « (non A) et (non B) ».

Exemple 5
Je considère la proposition A : « Nicolas me parle en anglais ou en français ». Sa négation, c'est-à-dire non(A) peut s'écrire « Nicolas ne me parle pas en anglais **et** Nicolas ne me parle pas en français ».

Exemple 6
On a vu que « $ABCD$ est un carré » pouvait s'écrire « $ABCD$ est un rectangle et $ABCD$ est un losange ». En prenant la négation, on obtient :

« $ABCD$ n'est pas un carré » peut s'écrire « $ABCD$ n'est pas un rectangle ou $ABCD$ n'est pas un losange ».

Exemple 7
Soit x un nombre relatif, l'encadrement $0 < x \leqslant 1$ est une abréviation de « $0 < x$ et $x \leqslant 1$ ».
On peut donc en écrire la négation suivante :
« $0 \geqslant x$ ou $x > 1$ ».

Démonstration 1
La démonstration du théorème s'effectue grâce à la table de vérité suivante.

A	B	A et B	non(**A** et **B**)	non A	non B	(non **A**) ou (non **B**)
V	V	V	**F**	F	F	**F**
V	F	F	**V**	F	V	**V**
F	V	F	**V**	V	F	**V**
F	F	F	**V**	V	V	**V**

Les colonnes de non(**A** et **B**) et de (non **A**) ou (non **B**) sont identiques, ce qui signifie que les deux propositions prennent bien les mêmes valeurs de vérité. □

On peut démontrer de la même façon la négation de ... *ou* ... Cf. exercice 6 page 14.

1.6 L'implication

L'implication est une opération logique qui se révèle être bien moins naturelle qu'il y paraît. Elle doit être utilisée avec discernement et circonspection.

1.6.1 Table de vérité

Définition 4.

À partir de deux propositions A, B, on peut définir une troisième proposition appelée « A implication B » et notée A $\Longrightarrow$ B, à l'aide de la table de vérité suivante :

A $\Longrightarrow$ B	Vrai	Faux
Vrai	Vrai	Faux
Faux	Vrai	Vrai

Théorème 2
La proposition A $\Longrightarrow$ B prend les mêmes valeurs de vérité que la proposition B ou (non A).

Démonstration 2
La démonstration s'effectue grâce à la table de vérité suivante.

A	B	**A $\Longrightarrow$ B**	non A	**B** ou non **A**
V	V	**V**	F	**V**
V	F	**F**	F	**F**
F	V	**V**	V	**V**
F	F	**V**	V	**V**

Les colonnes de (A $\Longrightarrow$ B) et de (B ou non A) sont identiques, ce qui signifie que les deux propositions prennent bien les mêmes valeurs de vérité. □

Exemple 8
Soit n un entier naturel. On considère les propositions :

- $\mathscr{D}_2(n)$: n est un entier pair.
  Autrement dit, le chiffre des unités dans l'écriture décimale de n est $0, 2, 4, 6$ ou 8.
- $\mathscr{D}_5(n)$: n est un entier divisible par 5.
  Autrement dit, le chiffre des unités dans l'écriture décimale de n est 0 ou 5.

(La divisibilité sera définie grâce à la définition 1 page 24 du cours de terminale.)

Pour quels entiers n a-t-on

$$\mathscr{D}_2(n) \Longrightarrow \mathscr{D}_5(n+1)?$$

Tout d'abord l'implication est Vraie pour tous les entiers n pour lesquels $\mathscr{D}_2(n)$ est Faux, c'est-à-dire pour tous les entiers impairs.

Enfin, elle est Vraie pour tous les entiers n pour lesquels $\mathscr{D}_2(n)$ est Vrai et $\mathscr{D}_5(n+1)$ est Vrai, c'est-à-dire pour tous les entiers pairs qui se terminent par 9 ou 4, autrement dit pour tous les entiers pairs qui se terminent par 4.

Finalement, l'implication est Vraie pour tous les entiers n qui se terminent par $1, 3, 5, 7, 9$ ou 4.

En particulier lorsque A prend la valeur Faux, l'implication A $\Longrightarrow$ B prend la valeur Vrai. De ce fait, pour établir la vérité de l'implication A $\Longrightarrow$ B, on peut se restreindre au cas où A est vraie. Deux situations se produisent alors :

- B est vraie et dans ce cas A $\Longrightarrow$ B est vraie.
- B est fausse et dans ce cas A $\Longrightarrow$ B est fausse.

Ainsi, l'implication A $\Longrightarrow$ B peut s'énoncer « Si A est vraie, alors B est vraie », ou même « Si A, alors B ».

Exemple 9
Théorème.
Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Si $ABCD$ est un losange, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Remarque 1.

La plupart des théorèmes du cours sont écrits sous la forme d'implications. Pour autant, le débutant – c'est vous *a priori* – doit se méfier des phrases qui s'écrivent « Si ..., alors ... ». Il est toujours possible de s'en passer dans la rédaction d'une copie. L'expérience montre que – lorsqu'elles apparaissent dans une solution – ces rédactions « Si ..., alors ... » sont la plupart du temps incorrectes.

1.6.2 Il faut, il suffit...

Quand l'implication A $\Longrightarrow$ B est vraie :

- A est une condition suffisante pour B : Il suffit que A soit vraie pour que B soit vraie.
- B est une condition nécessaire pour A : Il faut que B soit vraie pour que A soit vraie.

▶ Il suffit que le quadrilatère $ABCD$ soit un losange pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
▶ Il faut que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme pour que $ABCD$ puisse être un losange.
▶ Il est nécessaire que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme pour que $ABCD$ puisse être un losange.

1.6.3 Contraposée

Théorème 3
Soit A et B deux propositions. L'implication (non B) $\Longrightarrow$ (non A) a la même table de vérité que l'implication A $\Longrightarrow$ B. Ces deux implications sont dites contraposées l'une de l'autre.

Autrement dit, pour établir une implication, il suffit d'établir sa contraposée.

Exemple 10
Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Si $ABCD$ est un losange, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

Autrement dit, pour démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme, il suffit de démontrer que $ABCD$ est un losange.

La contraposée de cette implication s'écrit :

Soit $ABCD$ un quadrilatère du plan. Si $ABCD$ n'est pas un parallélogramme, alors $ABCD$ n'est pas un losange.

Autrement dit, pour démontrer que $ABCD$ n'est pas un losange, il suffit de démontrer que $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

Démonstration 3
La démonstration s'effectue grâce à la table de vérité suivante.

A	B	$\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{B}$	non A	non B	non $\mathbf{B} \Longrightarrow$ non $\mathbf{A}$
V	V	**V**	F	F	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**V**	V	F	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**

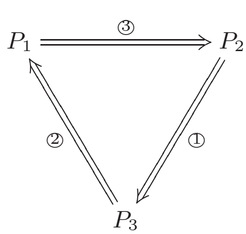
Les colonnes de ($A \Longrightarrow B$) et de (non $B \Longrightarrow$ non A) sont identiques, ce qui signifie que les deux propositions prennent bien les mêmes valeurs de vérité. $\square$

Une façon de de démontrer que trois propositions sont équivalentes :

Théorème 4
Soient P_1, P_2 et P_3 trois propositions.

Si $P_1 \Longrightarrow P_2$, $P_2 \Longrightarrow P_3$ et $P_3 \Longrightarrow P_1$ alors les trois propositions P_1, P_2 et P_3 sont équivalentes.

Démonstration 4



Premier cas : P_1 est vraie.
D'après l'implication 3, P_2 est vraie. D'après l'implication 1, P_3 est vraie.
Les trois propositions P_1, P_2 et P_3 prennent la même valeur logique. Elles sont donc équivalentes.

$\square$

Deuxième cas : P_1 est fausse.
D'après la contraposée de 2, P_3 est fausse. D'après la contraposée de 1 P_2 est fausse.
Les trois propositions P_1, P_2 et P_3 prennent la même valeur logique. Elles sont donc équivalentes.

1.6.4 Négation

On a déjà vu que l'implication A $\Longrightarrow$ B pouvait s'écrire « B ou (non A) ».
De ce fait, une négation de A $\Longrightarrow$ B peut s'écrire « (non B) et A ».

1.6.5 Réciproque

Définition 5.

Soient A et B deux propositions. Les implications A $\Longrightarrow$ B et B $\Longrightarrow$ A sont dites **implications réciproques** l'une de l'autre.

Une implication peut être vraie et son implication réciproque fausse.

Exemple 11
Soit ABC un triangle.

Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Cette implication est vraie : C'est le théorème de Pythagore.

La réciproque est : Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A. La réciproque est vraie elle aussi. C'est le théorème réciproque de Pythagore.

Exemple 12
Soit x un nombre réel.

Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$. La réciproque A $\Longrightarrow$ B est : « si $x^2 = 4$ alors $x = 2$ ». Cette réciproque est fausse car on peut avoir en même temps (non B) : $x = -2$ et A : $x^2 = 4$.

1.7 Équivalence

Définition 6.

Soit A et B deux propositions. On dit que A et B sont **équivalentes** lorsqu'elles ont la même valeur de vérité. On peut noter alors : A $\Longleftrightarrow$ B.

Théorème 5
Deux propositions A et B sont équivalentes lorsque A $\Longrightarrow$ B et B $\Longrightarrow$ A.

Démonstration 5
Vérification aisée par les tables de vérités. □

En français A $\Longleftrightarrow$ B peut s'écrire :
- Pour que A il faut et il suffit que B.
- On a A si et seulement si B.