S'aventurer au pays des Mathématiques

5e

Avec un guide
et 40 problèmes originaux à explorer

Matthieu Chiaramonte

ellipses

Approximation en chaîne

« Je vous renvoie, Monsieur, votre écrit touchant à la quadrature arithmétique, que je trouve fort belle et fort heureuse, et ce n'est pas peu à mon avis d'avoir découvert, dans un problème qui a exercé tant d'esprits, une voie nouvelle qui semble donner quelque espérance de parvenir à sa véritable solution. »

Christiaan Huygens (1629-1695) à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), mathématiciens, le 7 novembre 1674.

$$\pi \approx ?$$

Il existe plusieurs formules pour approximer la valeur en écriture décimale du nombre Pi, noté π. L'une d'entre elle a été trouvée par Leibniz en 1674 :

$$\pi = 4 \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

Les trois petits points « $\cdots$ » à la fin de la suite alternée d'additions/soustractions dans la parenthèse signifie « et ainsi de suite » : la prochaine fraction à ajouter serait $\frac{1}{9}$, puis il faudrait soustraire $\frac{1}{11}$ etc. et ce « jusqu'à l'infini ».

Dès que l'on arrête le calcul, on tombe alors sur une valeur approchée.

1. <u>À faire sans calculatrice</u> :

a) Donner un multiple commun aux nombres 3, 5 et 7.

b) Calculer $4 \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$.

c) Calculer la différence avec la valeur approchée au centième de $\pi \approx 3,14$. Que remarque-t-on ?

2. a) <u>À l'aide de la calculatrice</u>, quand faut-il s'arrêter pour obtenir une approximation du nombre π au dixième près ?

b) Est-ce que cette formule pour approximer π semble *efficace* ?

► *Correction page 25.*

À maîtriser à la fin de cette aventure

- Calculer en ligne un enchaînement des quatre opérations sans parenthèses.
- Calculer en ligne un enchaînement des quatre opérations avec parenthèses.
- Connaître les nombres premiers jusqu'à 30.
- Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers.
- Simplifier une fraction à l'aide des nombres premiers.
- Connaître la définition d'un quotient.
- Transformer un quotient en fraction.
- Additionner ou soutraire deux fractions de même dénominateur.
- Additionner ou soutraire deux fractions dont les dénominateurs sont multiples l'un de l'autre.

Feuille de route

☐ .../... **Chercher** le problème d'introduction de l'Aventure I.

☐ .../... **Lire** la partie A. *a) Sans parenthèses* puis **chercher** l'exercice I.1 puis **comparer** avec la correction.

☐ .../... **Lire** la partie A. *b) Avec parenthèses* puis **chercher** l'exercice I.2 puis **comparer** avec la correction.

☐ .../... **Lire** la partie A. *c) Cas particulier : la distributivité* puis **chercher** l'exercice I.3 puis **comparer** avec la correction.

☐ .../... **Recopier** la partie *B. Les nombres premiers* et **apprendre** par cœur la définition I.1 puis **chercher** l'exercice I.4 puis **comparer** avec la correction.

☐ .../... **Recopier** la partie C. *a) Quotient de deux nombres décimaux* et **apprendre** par cœur la définition I.2.

☐ .../... **Recopier** la partie C. *b) Transformer un quotient en fraction* et **apprendre** par cœur la propriété I.3 *(chercher la démonstration)* puis **chercher** l'exercice I.5 puis **comparer** avec la correction.

☐ .../... **Lire** la partie C. *c) Simplifier une fraction* puis **chercher** l'exercice I.6 puis **comparer** avec la correction.

☐ .../... **Recopier** la partie C. *d) Addition et soustraction de fractions* et **apprendre** par cœur la propriété I.5 *(chercher la démonstration)* puis **chercher** l'exercice I.7 puis **comparer** avec la correction.

☐ .../... ***Réviser toute l'Aventure I puis se tester avec l'interrogation I.1.***

☐ .../... **Chercher à nouveau** le problème de l'Aventure I puis **comparer** avec sa première recherche puis avec la correction.

☐ .../... **Chercher** les trois autres problèmes à explorer à la fin de l'Aventure I puis **comparer** avec la correction.

A. Priorités opératoires

a) Sans parenthèses

Une fois les quatre opérations connues (addition, soustraction, multiplication et division), on peut effectuer des calculs en ligne mêlant ces quatre opérations. Il existe cependant des priorités opératoires : on ne peut pas effectuer ces opérations dans l'ordre que l'on veut. Ces priorités opératoires découlent du sens de ces opérations, ce qui nous donne deux règles générales applicables à n'importe quel calcul :

1. Les multiplications/divisions sont prioritaires sur les additions/soustractions.
   Exemple : Quand on doit calculer $\mathbf{4 \times 3} + 2$, il s'agit en fait de $\mathbf{3 + 3 + 3 + 3} + 2$ d'où la priorité à la multiplication : on calcule d'abord 4 fois 3, puis on ajoute 2.
   Ce qui donne : $\mathbf{4 \times 3} + 2 = 12 + 2 = 14$.

2. Tout enchaînement de multiplications/divisions ou d'additions/soustractions doit être calculé en commençant par la gauche.
   Exemples :
   - Quand on doit calculer $3 + 5 - 7$, on voit bien que la soustraction $5 - 7$ n'est pas possible ici car $5 < 7$! Le sens d'écriture est de gauche à droite donc le sens du calcul est également de gauche à droite : $\mathbf{3 + 5} - 7 = 8 - 7 = 1$.
   - De même pour calculer $12 \div 4 \times 3$: on n'obtient pas le même résultat suivant que l'on commence par la droite ou par la gauche, d'où la règle de calcul basée sur la convention d'écriture de gauche à droite pour que tout le monde calcule de la même manière. Ici cela donne : $\mathbf{12 \div 4} \times 3 = 3 \times 3 = 9$.

ATTENTION :

- *Dans les cas d'enchaînements avec uniquement des additions ou uniquement des multiplications, il est possible de faire dans l'ordre souhaité comme cela est vu au niveau 6^{e}.*
- *À partir de maintenant nous privilégierons dès que possible l'écriture fractionnaire à la place de la division car, en plus de faciliter les calculs, elle permet de mieux voir les priorités opératoires : dans l'exemple précédent,* $12 \div 4 \times 3$ *s'écrirait* $\mathbf{\frac{12}{4}} \times 3 = 3 \times 3 = 9$.

Exemple : Calculer l'expression numérique A suivante :

$$
\begin{aligned}
A &= 4 \times 7 - 6 \div 2 + 8 \\
A &= \mathbf{4 \times 7} - \mathbf{\frac{6}{2}} + 8 \\
A &= \mathbf{28 - 3} + 8 \\
A &= 25 + 8 \\
A &= 33
\end{aligned}
$$

Exercice I.1.
Calculer les expressions numériques suivantes :
a) $B = 1 + 2 \times 3 - 4 \div 5$ **b)** $C = 8 \div 2 \times 10 - 3 + 2$

► *Correction page 21.*

b) Avec parenthèses

Si l'on souhaite modifier l'ordre des priorités, il suffit d'utiliser des parenthèses pour indiquer ce changement : il faut alors commencer par les parenthèses les plus à l'intérieur (quand il y a plusieurs niveaux de parenthèses on utilise souvent des crochets).
Exemple : Dans l'exemple précédent, on peut rendre la soustraction et l'addition prioritaires et ainsi obtenir une autre expression numérique (que nous noterons D) :

$$\begin{aligned} D &= 4 \times \mathbf{(7-6)} \div \mathbf{(2+8)} \\ D &= \mathbf{4 \times 1} \div 10 \\ D &= 4 \div 10 \\ D &= 0,4 \end{aligned}$$

Exercice I.2.
Calculer les expressions numériques suivantes :
a) $E = 100 - (11 - 1) \times (3,5 + 6,5)$ **b)** $F = 80 \div [4 \times (6 - 1)] - 1$

► *Correction page 22.*

c) Cas particulier : la distributivité

La distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est une propriété qui rend possible le passage d'un produit (expression avec parenthèses, appelée *forme factorisée*) à une somme (expression sans parenthèses, appelée *forme développée*), et inversement : ces deux expressions sont alors **égales**.
Nous l'énoncerons mathématiquement de manière générale lors de l'Aventure VIII mais commençons à la regarder et l'utiliser sur des exemples numériques (avec des nombres) :
Exemples :

- On a $\mathbf{3 \times (4+5)} = (4{+}5){+}(4{+}5){+}(4{+}5) = 4{+}4{+}4{+}5{+}5{+}5 = \mathbf{3 \times 4 + 3 \times 5}$
  On peut donc calculer cette expression numérique de deux manières différentes :
  - Pour le **passage du produit à une somme**, on dit qu'**on *développe*** le produit, il s'agit du **sens du *développement*** (on passe de la *forme factorisée* à la *forme développée*) :

$$\underbrace{\mathbf{3}\times(4+5)}_{\text{forme factorisée}} = \underbrace{\mathbf{3}\times 4 + \mathbf{3}\times 5}_{\text{forme développée}} = 12 + 15 = 27$$

- Pour le **passage de la somme au produit**, on dit qu'**on *factorise*** la somme, il s'agit du **sens de la *factorisation*** (on passe de la *forme développée* à la *forme factorisée*) :

$$\underbrace{\mathbf{3}\times 4+\mathbf{3}\times 5}_{\text{forme développée}} = \underbrace{\mathbf{3}\times(4+5)}_{\text{forme factorisée}} = 3\times 9 = 27$$

- Cela permet de calculer mentalement plus rapidement :
  - $13\times 98 = \mathbf{13}\times(100-2) = \mathbf{13}\times 100 - \mathbf{13}\times 2 = 1\ 300 - 26 = 1\ 274$
  - $\mathbf{37,9}\times 2,8 + \mathbf{37,9}\times 7,2 = \mathbf{37,9}\times(2,8+7,2) = 37,9\times 10 = 379$

Exercice I.3.
Sans poser l'opération, calculer les expressions numériques suivantes à l'aide de la distributivité :

a) $G = 75\times 12$ **b)** $H = 23\times 74 + 26\times 23$ **c)** $I = 9\times 999$

▶ *Correction page 22.*

B. Les nombres premiers

a) Définition

Définition I.1.
Un **nombre premier** est un nombre entier qui admet **uniquement deux diviseurs distincts** : 1 et lui-même.

Exemples :

- 7 est un nombre premier car les seuls nombres qui divisent 7 sont 1 et 7. Autrement dit le seul produit de nombres entiers qui est égal à 7 est 1×7.
- Voici la liste de tous les nombres premiers jusqu'à 30 :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

- Le seul nombre pair qui est premier est le nombre 2 : en effet tous les autres sont par définition divisibles par 2 et donc pas uniquement par 1 et eux-mêmes.

b) Décomposition en produit de facteurs premiers

Les nombres premiers servent notamment à décomposer un nombre entier en une succession de produits : on commence par essayer de décomposer le nombre de départ par 2, puis par 3 etc. Puis on répéte le même processus jusqu'à obtenir uniquement des nombres premiers (qui ne peuvent donc plus être décomposés).
La décomposition obtenue à la fin est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemples : Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres entiers suivants :

- $30 = 2 \times \mathbf{15} = 2 \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}$
- $168 = 2 \times \mathbf{84} = 2 \times \mathbf{2} \times \mathbf{42} = 2 \times 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$

Exercice I.4.
Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres entiers suivants :
a) 42 **b)** 99 **c)** 180

► *Correction page 22.*

C. Calculer avec des quotients

a) Quotient de deux nombres décimaux

Un quotient est **un nombre** qui nous définissons ainsi :

Définition I.2.
Considérons deux nombres décimaux a et b, avec $\boldsymbol{b \neq 0}$.

Le **quotient de** $\boldsymbol{a}$ **par** $\boldsymbol{b}$ est le nombre q tel que $b \times \boldsymbol{q} = a$: c'est donc le nombre tel que si on le multiplie par b, on obtient le nombre a.

Ce quotient q est noté $\boldsymbol{\dfrac{a}{b}}$ et on a donc l'égalité :

$$b \times \boldsymbol{\frac{a}{b}} = a$$

Exemple : Le quotient de $0,21$ par $0,3$ est $\dfrac{0,21}{0,3}$: c'est l'écriture fractionnaire de ce quotient (elle existe donc toujours par définition).
On a donc l'égalité $0,3 \times \dfrac{0,21}{0,3} = 0,21$.
Mais on a aussi $0,3 \times 0,7 = 0,21$ donc $\dfrac{0,21}{0,3} = 0,7$: c'est l'écriture décimale de ce quotient (mais elle n'existe pas toujours).

ATTENTION : *Une fraction est un quotient de deux nombres* *entiers*.

b) Transformer un quotient en fraction

La propriété suivante, déjà vue au niveau 6^{e} pour les fractions, s'élargit aux quotients de deux nombres décimaux :

Propriété I.3.
Considérons trois nombres décimaux a, b et k, avec $b \neq 0$ **et** $k \neq 0$.
On ne modifie pas la valeur du quotient $\frac{a}{b}$ lorsqu'on **multiplie son numérateur ET son dénominateur par un même nombre décimal non nul.**
On a alors l'égalité de quotients suivante :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times \boldsymbol{k}}{b \times \boldsymbol{k}}$$

Cela signifie que les nombres $\frac{a}{b}$ et $\frac{a \times k}{b \times k}$ sont égaux.

Démonstration : *À chercher !*
Indication : Utiliser la définition I.2 d'un quotient : la démonstration est la même que pour les fractions.

► *Correction page 21.*

Ainsi, sachant qu'une fraction est un quotient de deux nombres entiers, pour passer d'un quotient à une fraction il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par une même puissance de 10 (1 ; 10 ; 100 : 1 000 etc.) *suffisamment grande* pour qu'ils deviennent des nombres entiers :
Exemples :

- $\frac{2,3}{5} = \frac{2,3 \times \mathbf{10}}{5 \times \mathbf{10}} = \frac{23}{50}$
- $\frac{46,09}{0,007} = \frac{46,09 \times \mathbf{1\ 000}}{0,007 \times \mathbf{1\ 000}} = \frac{46\ 090}{7}$

Exercice I.5.
Écrire les quotients suivants sous forme de fraction :

a) $\frac{89}{3,1}$ **b)** $\frac{0,06}{1,7}$ **c)** $\frac{1,099}{0,0909}$

► *Correction page 22.*

ATTENTION : *On vient de voir qu'un quotient est toujours égal à une fraction de deux nombres entiers. Or, comme cela est vu niveau 6^{e}, une fraction n'a pas toujours d'écriture décimale : c'est donc la même chose pour un quotient.*
Un quotient a donc toujours une écriture fractionnaire (de par sa définition) mais pas toujours une écriture décimale.