6e

Éric Dubon
Anne Heurtier

Mathématiques

En route vers l'excellence avec 160 exercices corrigés

ellipses

Chapitre 1

Entiers naturels

Les entiers positifs $0, 1, 2, \ldots$ constituent un ensemble appelé ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ (cette notation est due au mathématicien allemand Richard Dedekind (1831-1916)). C'est un ensemble contenant une infinité d'éléments ordonnés : $0 < 1 < 2 < \ldots$ Cet ensemble de nombres est muni d'une arithmétique, c'est-à-dire d'un ensemble d'opérations sur ses éléments. Certains pays, comme l'Espagne par exemple, ne considèrent pas le 0 comme entier naturel et le premier entier naturel est donc 1. Cela peut se comprendre si les entiers sont considérés comme des « cardinaux », c'est-à-dire qu'ils servent à compter des quantités.

Une expression littérale est une expression mathématique contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres. Cela permet d'énoncer des résultats les plus généraux possibles sans avoir à considérer tous les cas.

Par exemple, l'addition est commutative (c'est-à-dire que l'on peut modifier l'ordre des entiers sans changer le résultat). Il est ainsi possible d'écrire $2 + 3 = 3 + 2$, mais aussi $1 + 4 = 4 + 1$, etc. Même si tous les entiers vérifient cette propriété, il est impossible de l'écrire pour tous les entiers. Des lettres sont alors utilisées. Ainsi, soient a et b des entiers (qui peuvent prendre n'importe quelle valeur entière). La propriété de commutativité de l'addition s'écrit

$$a + b = b + a.$$

Dans tout ce chapitre, le calcul littéral sera utilisé pour énoncer des résultats généraux vérifiés par tous les entiers naturels.

1.1 Exercices sur les opérations entre entiers naturels

Rappels de cours (pour les exercices de 1 à 3)

L'addition est une ***loi de composition interne*** *sur* $\mathbb{N}$. *En effet, soient deux entiers naturels* a *et* b. *Leur somme* $s = a+b$ *est elle aussi un entier, donc un élément de* $\mathbb{N}$. *Autrement dit, l'addition fait correspondre à deux éléments quelconques* a, b *de* $\mathbb{N}$ *un élément* s *de* $\mathbb{N}$, *d'où le mot* ***interne***.
Soient a, b *et* c *des entiers naturels. L'addition vérifie les propriétés suivantes :*

1. ***associativité*** *:* $(a + b) + c = a + (b + c)$ *;*
2. ***commutativité*** *:* $a + b = b + a$ *;*
3. *elle possède un unique* ***élément neutre*** *qui est* 0 *car* $0 + a = a + 0 = a$.

Il en va de même pour la multiplication.
Quels que soient les entiers naturels a *et* b, *le* ***produit*** $p = a \times b$ *est bien, lui aussi, un entier naturel. La multiplication est donc une loi de composition interne sur* $\mathbb{N}$.
Soient a, b *et* c *des entiers naturels, la multiplication vérifie les propriétés suivantes :*

1. ***associativité*** *:* $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ *;*
2. ***commutativité*** *:* $a \times b = b \times a$ *;*
3. ***distributivité par rapport à l'addition*** *:* $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ *;*
4. *elle possède un unique* ***élément neutre*** *qui est* 1 *car* $1 \times a = a \times 1 = a$.

Ce n'est pas vrai pour la soustraction et la division.

Exercice 1

Donner, pour chaque cas, la propriété qui permet d'affirmer l'égalité :

— $2\,089 \times 1 = 2\,089$

— $12 + 15 + 3 = 3 + 12 + 15$

— $45 \times (56 \times 3) = (45 \times 56) \times 3$

— $2 \times (50 + 83) = (2 \times 50) + (2 \times 83)$

— $523 + 0 + 36 = 523 + 36$

— $34 + (1\,056 + 73) + 5\,467 = (34 + 1\,056) + 73 + 5\,467$

— $23 \times 4 = 4 \times 23$

Exercice 2

Quel est le quotient obtenu pour chacune des divisions suivantes :

— $432 \div 8$

- $2\,530 \div 23$
- $1024 \div 32$
- $6\,944 \div 124$
- $88\,935 \div 245$

Exercice 3

Calculer de façon astucieuse :

- $89 \times 2 + 4 \times 89 + 89 \times 2 + 3 \times 89$
- $7 \times 2 + 2 \times 8 + 2 \times 0$
- $23 \times 4 + 5 \times 23 + 23 \times 1 - 23 \times 2$

Rappels de cours (pour les exercices de 4 à 7)

Rappelons qu'il existe des priorités entre les opérations :

- *La multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.*
- *Les calculs qui sont entre parenthèses sont à faire en premier. S'il y a plusieurs parenthèses incluses les unes dans les autres, il faut commencer par la parenthèse la plus intérieure.*
- *Si le calcul est, par exemple, composé seulement d'additions et de soustraction (ce serait la même chose s'il n'y avait que des multiplications et des divisions), alors les opérations doivent être faites de gauche à droite, c'est-à-dire dans le sens de la lecture.*

Exemples :

a) $3 + 5 \times 2 - 1 = 3 + 10 - 1 = 13 - 1 = 12$

b) $10 \times (7 + (25 - 16)) = 10 \times (7 + 9) = 10 \times 16 = 160$

c) $(7 + 5 \times (3 + 4)) \times 2 = (7 + 5 \times 7) \times 2 = (7 + 35) \times 2 = 42 \times 2 = 84$

d) $(7+5)\times 8-\Big(3\times(5+2\times 4)-7\Big) = 12\times 8-\Big(3\times(5+8)-7\Big) = 12\times 8-(3\times 13-7) = 12 \times 8 - (39 - 7) = 12 \times 8 - 32 = 96 - 32 = 64.$

Exercice 4

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

- $3 \times 4 + 78 + 4 \times 100 + 56 \div 2$

— $50 - 7 \times 5 + 6 + 45 \div 9 + (12 \times 2 + 3)$
— $(5 \times 2 + 3) \times 2 + 81 \div 9 + 10$

Exercice 5

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

— $45 + 6 \times 7 - 66 \div 11 - 3$
— $34 + (5 + 6 \times 7 \div 2 + 5) + 7$
— $(5 + 6 \times 45 \div 5 \times 2 + 6) - 7 \times 2$

Exercice 6

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

— $2 \times (50 + 83) + 45 \times (56 \times 3)$
— $34 + (1\,056 + 73) + (5\,467 \div 7 + 2)$
— $23 \times 4 \div 2 + (12 + 15 + 3)$

Exercice 7

Calculer, en respectant les priorités opératoires :

— $(2 \times 50 + 83) + (45 \times 56) \times 3$
— $(34 + 1\,056) \times (73 + 5\,467) \div 2 + 2$
— $(23 \times 4 \div 2) + 12 \times 15 + 3$

1.2 Correction des exercices

Nous présentons les résultats sans poser les opérations mais il est fortement conseillé au lecteur de le faire.

Correction de l'exercice 1

Donnons les propriétés qui permettent d'affirmer les égalités.

— $2\,089 \times 1 = 2\,089$: *1 est l'élément neutre de la multiplication*
— $12 + 15 + 3 = 3 + 12 + 15$: *commutativité de l'addition*
— $45 \times (56 \times 3) = (45 \times 56) \times 3$: *associativité de la multiplication*
— $2 \times (50 + 83) = (2 \times 50) + (2 \times 83)$: *distributivité de la multiplication par rapport à l'addition*
— $523 + 0 + 36 = 523 + 36$: *0 est l'élément neutre de l'addition*

— $34 + (1\,056 + 73) + 5\,467 = (34 + 1\,056) + 73 + 5\,467$: *associativité de l'addition*
— $23 \times 4 = 4 \times 23$: *commutativité de la multiplication*

Correction de l'exercice 2
Déterminons le quotient pour chacune des divisions.

— $432 \div 8$: le quotient est 54 ($432 = 8 \times 54$)
— $2\,530 \div 23$: le quotient est 110 ($2\,530 = 23 \times 110$)
— $1024 \div 32$: le quotient est 32 ($1024 = 32 \times 32$)
— $6\,944 \div 124$: le quotient est 56 ($6\,944 = 124 \times 56$)
— $88\,935 \div 245$: le quotient est 363 ($88\,935 = 245 \times 363$)

Correction de l'exercice 3
Calculons de façon astucieuse.

— $89 \times 2 + 4 \times 89 + 89 \times 2 + 3 \times 89 = 89 \times (2 + 4 + 2 + 3) = 89 \times 11 = 979$
— $7 \times 2 + 2 \times 8 + 2 \times 0 = 2 \times (7 + 8 + 0) = 2 \times 15 = 30$
— $23 \times 4 + 5 \times 23 + 23 \times 1 - 23 \times 2 = 23 \times (4 + 5 + 1 - 2) = 23 \times 8 = 184$

Correction de l'exercice 4
Calculons, en respectant les priorités opératoires.

— $3 \times 4 + 78 + 4 \times 100 + 56 \div 2 = 12 + 78 + 4 \times 100 + 56 \div 2 = 12 + 78 + 400 + 56 \div 2 = 12 + 78 + 400 + 28 = 518$
— $50 - 7 \times 5 + 6 + 45 \div 9 + (12 \times 2 + 3) = 50 - 7 \times 5 + 6 + 45 \div 9 + (24 + 3) = 50 - 7 \times 5 + 6 + 45 \div 9 + 27 = 50 - 35 + 6 + 45 \div 9 + 27 = 50 - 35 + 6 + 5 + 27 = 53$
— $(5 \times 2 + 3) \times 2 + 81 \div 9 + 10 = (10 + 3) \times 2 + 81 \div 9 + 10 = 13 \times 2 + 81 \div 9 + 10 = 26 + 81 \div 9 + 10 = 26 + 9 + 10 = 45$

Correction de l'exercice 5
Calculons, en respectant les priorités opératoires.

— $45 + 6 \times 7 - 66 \div 11 - 3 = 45 + 42 - 66 \div 11 - 3 = 45 + 42 - 6 - 3 = 78$
— $34+(5+6\times7\div2+5)+7 = 34+(5+42\div2+5)+7 = 34+(5+21+5)+7 = 34+31+7 = 72$
— $(5+6\times45\div5\times2+6)-7\times2 = (5+270\div5\times2+6)-7\times2 = (5+54\times2+6)-7\times2 = (5 + 108 + 6) - 7 \times 2 = 119 - 7 \times 2 = 119 - 14 = 105$

Solutions

Correction de l'exercice 6

Calculons, en respectant les priorités opératoires.

- $2 \times (50 + 83) + 45 \times (56 \times 3) = 2 \times 133 + 45 \times (56 \times 3) = 2 \times 133 + 45 \times 168 = 266 + 45 \times 168 = 266 + 7\,560 = 7\,826$
- $34+(1\,056+73)+(5\,467\div 7+2) = 34+1\,129+(5\,467\div 7+2) = 34+1\,129+(781+2) = 34 + 1\,129 + 783 = 1\,946$
- $23 \times 4 \div 2 + (12 + 15 + 3) = 23 \times 4 \div 2 + 30 = 92 \div 2 + 30 = 46 + 30 = 76$

Correction de l'exercice 7

Calculons, en respectant les priorités opératoires.

- $2 \times (50 + 83) + 45 \times (56 \times 3) = 2 \times 133 + 45 \times (56 \times 3) = 2 \times 133 + 45 \times 168 = 266 + 45 \times 168 = 266 + 7\,560 = 7\,826$
- $34+(1\,056+73)+(5\,467\div 7+2) = 34+(1\,056+73)+(781+2) = 34+1129+(781+2) = 34 + 1129 + 783 = 1946$
- $23 \times 4 \div 2 + (12 + 15 + 3) = 23 \times 4 \div 2 + 30 = 92 \div 2 + 30 = 46 + 30 = 76$

Chapitre 2

Droites, demi-droites et segments de droite

La géométrie qui est présentée dans ce livre, mais aussi dans tout le Secondaire, s'appelle ***géométrie euclidienne***. Elle porte ce nom en hommage au mathématicien de la Grèce antique, Euclide.
Euclide écrivit un livre très important, appelé « Élements », dans lequel sont présentées les bases de la géométrie appelées définitions, axiomes et postulats [1] énoncées en annexes de cet ouvrage, page 236.
Ces bases vont garantir que tout ce qui sera écrit a, géométriquement parlant, un sens. Pour se faire une idée de l'importance des axiomes énoncés par Euclide, il suffit que l'un d'eux (le postulat des parallèles) fasse défaut et c'est une tout autre géométrie dite non euclidienne qui apparaît...

Dans ce qui suit, nous aborderons donc les notions de droite et de segments puis la notion de longueur. [2]

Nous renvoyons les plus curieux d'entre vous au paragraphe 13.3 pour en savoir plus et connaître les fondements de la géométrie abordée au Secondaire.

1. Pour Euclide et certains philosophes grecs de l'Antiquité, un axiome était une affirmation qu'ils considéraient comme évidente et qui n'avait nul besoin de démonstration. Un axiome peut donc être vu comme une vérité évidente en soi sur laquelle une autre connaissance peut être construite. Le postulat (du latin *postulare* qui signifie « demander ») est un principe non démontré utilisé dans la construction d'une théorie mathématique.
2. Nous remercions Julien Giacomoni pour les discussions que nous avons eues avec lui sur ce sujet.

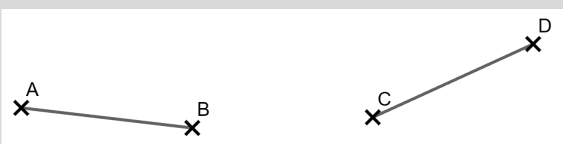
2.1 Exercices sur les droites et segments de droite

Rappels de cours (pour les exercices de 1 à 7)

Une corde tendue entre deux points forme une ligne droite.
Une corde qui n'est pas tendue forme une ligne courbe.
Une corde tendue entre plusieurs points forme une ligne brisée.

Segment

Une ligne droite sera précisément dénommée segment quand elle sera limitée par deux points placés à ses extrémités (cas de la corde tendue).
Un point est matérialisé par une croix, on le désigne souvent par une lettre en majuscule.
Le segment est alors nommé à l'aide de ses extrémités avec des crochets : $[AB], [CD], \ldots$. *Un segment a donc une longueur.*



Droite

En reprenant l'idée énoncée en Postulat par Euclide, lorsqu'un segment est tracé, il peut être prolongé en un segment plus long. Un segment $[AB]$ *peut ainsi être prolongé en un segment* $[AC]$ *à l'aide de la règle, en ligne droite en passant par* B. *Il est possible de faire de même en passant par* A *et former un segment plus grand appelé* $[CB]$. *Il est possible de faire ainsi en donnant des longueurs aussi grandes que souhaitées.*
Si le segment $[AB]$ *est prolongé à travers* A *et à travers* B *à l'infini, alors on obtient la droite* (AB), *notée avec des parenthèses et avec les points qui ont servi à l'engendrer. Cela explique qu'un segment est souvent nommé segment de droite au lieu de segment.*