

Mohammed Aassila

400 exercices corrigés d'Algèbre

avec rappels de cours

PRÉPAS
SUP

2^e édition



ellipses

TABLE DES MATIÈRES



1	Raisonnement et vocabulaire ensembliste	5
1.1	Rudiments de logique	5
1.1.1	Assertions	5
1.1.2	Modes de raisonnement	6
1.2	Ensembles	6
1.3	Applications et relations	7
1.4	Exercices	13
1.4.1	Exercices d'application directe du cours	13
1.4.2	Exercices de base	16
1.4.3	Exercices d'assimilation	21
1.4.4	Exercices d'entraînement	24
1.4.5	Exercices d'approfondissement	25
1.4.6	Du côté des concours	25
2	Calculs algébriques	27
2.1	Sommes simples	27
2.2	La formule du binôme de Newton	28
2.3	Produits simples	29
2.4	Sommes doubles	29
2.5	Systèmes linéaires	29
2.6	Exercices	31
2.6.1	Exercices d'application directe du cours	31
2.6.2	Exercices de base	32
2.6.3	Exercices d'assimilation	40
2.6.4	Exercices d'entraînement	43
2.6.5	Du côté des concours	45
3	Nombres complexes et trigonométrie	51
3.1	Nombres complexes	51
3.2	Nombres complexes de module 1	52
3.3	Fonction exponentielle complexe	52
3.4	Applications à la trigonométrie	53
3.5	Argument d'un nombre complexe	54
3.6	Racines n -ièmes d'un nombre complexe	54
3.7	Nombres complexes et géométrie	55
3.8	Exercices	56
3.8.1	Exercices d'application directe du cours	56
3.8.2	Exercices de base	58
3.8.3	Exercices d'assimilation	74

3.8.4	Exercices d'entraînement	81
3.8.5	Exercices d'approfondissement	99
3.8.6	Du côté des concours	104
4	Arithmétique	109
4.1	Division euclidienne dans \mathbb{Z}	109
4.2	PGCD et PPCM	109
4.3	Nombres premiers	111
4.4	Congruence	111
4.5	Exercices	112
4.5.1	Exercices d'application directe du cours	112
4.5.2	Exercices de base	112
4.5.3	Exercices d'assimilation	119
4.5.4	Exercices d'entraînement	125
4.5.5	Exercices d'approfondissement	131
4.5.6	Du côté des concours	147
5	Structures algébriques usuelles	153
5.1	Loi de composition interne	153
5.2	Groupe	153
5.3	Morphisme de groupes	154
5.4	Anneau	155
5.5	Corps	156
5.6	Exercices	157
5.6.1	Exercices d'application directe du cours	157
5.6.2	Exercices de base	158
5.6.3	Exercices d'assimilation	168
5.6.4	Exercices d'entraînement	171
5.6.5	Exercices d'approfondissement	179
5.6.6	Du côté des concours	182
6	Polynômes et fractions rationnelles	185
6.1	Polynômes	185
6.1.1	Généralités	185
6.1.2	Racines d'un polynôme	186
6.1.3	Polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$	186
6.1.4	Dérivation des polynômes. Formule de Taylor	186
6.1.5	Fonctions symétriques élémentaires	187
6.1.6	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	187
6.2	Fractions rationnelles	188
6.3	Exercices	189
6.3.1	Exercices d'application directe du cours	189
6.3.2	Exercices de base	189
6.3.3	Exercices d'assimilation	192
6.3.4	Exercices d'entraînement	206
6.3.5	Exercices d'approfondissement	233
6.3.6	Du côté des concours	252
7	Espaces vectoriels. Applications linéaires	259
7.1	Famille libres. Familles génératrices. Bases	259
7.2	Somme de sous-espaces vectoriels	260
7.3	Théorème du rang	262
7.4	Formes linéaires. Hyperplans	262
7.5	Matrices	263

7.6	Sous-espaces affines d'un espace vectoriel	264
7.7	Systèmes linéaires	265
7.7.1	Opérations élémentaires	265
7.7.2	Systèmes linéaires	265
7.7.3	Interprétation	266
7.7.4	Résolution	266
7.8	Exercices	267
7.8.1	Exercices d'application directe du cours	267
7.8.2	Exercices de base	271
7.8.3	Exercices d'assimilation	280
7.8.4	Exercices d'entraînement	309
7.8.5	Exercices d'approfondissement	320
7.8.6	Du côté des concours	322
8	Groupe symétrique. Déterminant	327
8.1	Groupe symétrique	327
8.1.1	Cycle et transposition	327
8.1.2	Signature d'une permutation	329
8.2	Déterminants	330
8.2.1	Généralités. Définitions	330
8.2.2	Compléments : déterminants et géométrie euclidienne	332
8.3	Exercices	333
8.3.1	Exercices d'application directe du cours	333
8.3.2	Exercices de base	333
8.3.3	Exercices d'assimilation	337
8.3.4	Exercices d'entraînement	346
8.3.5	Exercices d'approfondissement	363
8.3.6	Du côté des concours	369
9	Espaces préhilbertiens réels	375
9.1	Produit scalaire	375
9.2	Orthogonalité	376
9.3	Espaces euclidiens	377
9.4	Projecteurs et symétries orthogonaux	377
9.5	Hyperplans affines d'un espace euclidien	378
9.6	Endomorphismes orthogonaux	379
9.7	Groupe orthogonal	380
9.7.1	Groupe orthogonal en dimension 2	380
9.7.2	Groupe orthogonal en dimension 3	381
9.8	Exercices	383
9.8.1	Exercices d'application directe du cours	383
9.8.2	Exercices de base	384
9.8.3	Exercices d'assimilation	388
9.8.4	Exercices d'entraînement	396
9.8.5	Exercices d'approfondissement	409
9.8.6	Du côté des concours	422