

Ahmed Lesfari

L3
M1
M2

Étude des systèmes hamiltoniens et leur complète intégrabilité

Cours, exercices et problèmes corrigés



ellipses

Chapitre 1

Théorie de Hamilton-Jacobi

1.1 Problème variationnel, équations de Lagrange

1.1.1 Calcul des variations

Considérons des points fixés t_1, t_2 et une courbe différentiable

$$\gamma : x = x(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

reliant les deux points $t = t_1$ et $t = t_2$. Définissons la fonctionnelle $S[\gamma]$ par l'intégrale,

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}, \quad (1.1)$$

où

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, \dot{x}, t) \longmapsto \mathcal{L}(x, \dot{x}, t),$$

est une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On utilise la notation $S[\gamma]$ plutôt que $S(\gamma)$ pour souligner qu'il s'agit de fonctionnelles et pas seulement de fonctions car la fonctionnelle $S[\gamma]$ est un nombre qui dépend d'une fonction (plus précisément, il s'agit d'une fonction définie sur un espace de fonctions). La quantité fonctionnelle $S[\gamma]$ est dite intégrale d'action ou tout simplement action. L'approche ou problème variationnelle consiste à déterminer la fonction $x(t)$ telle que $S[\gamma]$ soit extrémale (maximale ou minimale), sachant que :

$$x(t_1) = a, \quad x(t_2) = b,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des valeurs données.

Interprétation géométrique. Géométriquement, cela revient à chercher la courbe ou plus précisément l'arc de la courbe joignant le point $A(t_1, a)$ au point $B(t_2, b)$ admettant une tangente qui varie continûment pour lequel $S[\gamma]$ soit stationnaire (extrémale). Cette dernière signifie que si on considère la fonction

$$t \longmapsto x(t) + \varepsilon \lambda(t),$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon|$ suffisamment petit et $\lambda(t)$ une fonction quelconque de classe \mathcal{C}^1 nulle en t_1 et t_2 , alors S est stationnaire pour x si (avec un abus de notation) $S[x] = S[x+\varepsilon\lambda]$ à l'ordre 1 en ε , c.-à-d., $S[x+\varepsilon\lambda] - S[x] = o(\varepsilon)$ ou explicitement,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t) + \varepsilon\lambda(t), \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\lambda}(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt = o(\varepsilon).$$

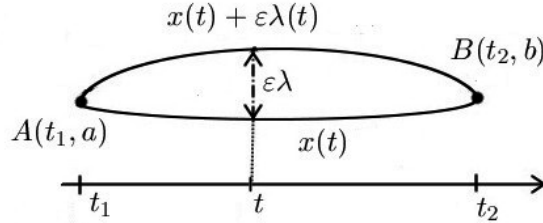


Figure 1 – Chemin le plus court entre deux points

Voyons cela avec un peu plus de détail. Mais avant cela, rappelons le lemme fondamental du calcul des variations :

Lemme 1.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ telle que pour toute fonction g de classe \mathcal{C}^1 nulle en a et b , on ait*

$$\int_a^b g(t)f(t)dt = 0.$$

Alors, $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$.

Démonstration : On raisonne par l'absurde. Soit $t_0 \in [a, b]$ tel que : $f(t_0) \neq 0$. Sans restreindre la généralité, on peut par exemple supposer que $f(t_0) > 0$. Par hypothèse la fonction f est continue sur $[a, b]$, donc il existe un voisinage $[c, d] \equiv [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ de t_0 sur lequel f reste positive. Dès lors, on peut construire une fonction g positive, de classe \mathcal{C}^1 et de support $[c, d]$ comme suit :

$$g(t) = \begin{cases} (t - c)^2(t - d)^2, & t \in [c, d] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Évidemment, g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[c, d]$ et on a

$$\int_a^b g(t)f(t)dt = \int_c^d g(t)(t - c)^2(t - d)^2 dt > 0,$$

car la fonction sous le signe intégrale est positive. Ce qui est absurde et donc la fonction f est partout nulle sur $]a, b[$. \square

Remplaçons dans (1.1), $x(t)$ par $x(t) + \varepsilon\lambda(t)$ (rappelons que $\lambda(t)$ est une fonction telle que : $\lambda(t_1) = \lambda(t_2) = 0$ et $\varepsilon \ll 1$), c.-à-d.,

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} \left(x(t) + \varepsilon\lambda(t), \dot{x}(t) + \varepsilon\dot{\lambda}(t), t \right) dt.$$

La dérivée de S par rapport à ε est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\varepsilon} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{L}(x + \varepsilon\lambda, \dot{x} + \varepsilon\dot{\lambda}, t) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \varepsilon} \right) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\lambda(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \dot{\lambda}(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) dt, \end{aligned}$$

Or

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\lambda}(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}, t) dt = \lambda(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) dt,$$

(une intégration par parties), donc

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\lambda(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \lambda(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt + \lambda(t) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_1}^{t_2},$$

et comme par hypothèse $\lambda(t_1) = \lambda(t_2) = 0$, alors

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt.$$

Une condition nécessaire pour que S soit extrémale (stationnaire) pour $\varepsilon = 0$ est que la dérivée de S par rapport à ε soit nulle pour $\varepsilon = 0$, donc on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt = 0.$$

En tenant compte du lemme précédent, on obtient l'équation suivante (équation d'Euler-Lagrange) :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0,$$

et celle-ci sera analysée en détail plus loin avec quelques interprétations liées notamment à la mécanique.

Exemple 1.2 La longueur d'une courbe différentielle γ et un exemple simple de fonctionnelle. Elle est fournie par

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt.$$

Comme $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}$, alors

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right).$$

Dès lors, $\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \text{constante}$, d'où $\dot{x} = a$ et par conséquent,

$$x = ax + b, \quad (a, b \equiv \text{constantes}),$$

ce qui montre que les extrémales de la longueur sont des droites dans le plan.

Exemple 1.3 Le principe de Fermat de l'optique géométrique : la lumière suit la trajectoire la plus rapide. Autrement dit, de tous les trajets possibles permettant de relier deux points A et B , l'est celui (suivi par un rayon lumineux) qui minimise le temps de parcours. L'indice de réfraction est $n = \frac{c}{v} \geq 1$ où v est la vitesse de la lumière et c la vitesse de la lumière dans le vide. Le temps mis par la lumière pour aller de A à B est $t = \frac{s}{n}$ où s est la longueur du parcours. Dès lors, la durée d'un trajet quelconque de A à B est donnée par

$$\int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{n} = \frac{1}{c} \int_A^B v ds.$$

La trajectoire de propagation de la lumière réalise la valeur stationnaire de cette intégrale. On a donc une quantité qui caractérise le trajet d'un rayon lumineux, c'est ce qu'on appelle le chemin optique. Le principe de Fermat consiste à minimiser le temps de trajet et donc du chemin optique. La lumière se propage entre les points A et B en suivant le chemin qui minimise le temps de parcours.

En mécanique lagrangienne et hamiltonienne (voir plus loin), \mathcal{L} est appelée le lagrangien du principe variationnel et il est égal à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.

On utilise parfois la notation suivante :

$$\delta S[\gamma] = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt = 0,$$

avec $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$ pour le mouvement réel du système à étudier, et qui symbolise le fait que la fonctionnelle $S[\gamma]$ est extrémale : c'est le principe de Hamilton. Rappelons qu'en général, pour une fonction de la forme $\varphi(\alpha, \dots)$ la

notation $\delta\varphi$ désigne la différentielle partielle : $\delta\varphi = \left. \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} \right|_{\alpha=0}$ et on symbolise le fait que l'intégrale (1.1) est extrémale en écrivant $\delta S = 0$, lors d'une variation (indiquée par la lettre δ) fonctionnelle des chemins. Cela signifie que la différence entre cette intégrale évaluée le long de la trajectoire réelle et l'intégrale évaluée le long de n'importe quelle trajectoire virtuelle infiniment voisine est un infiniment petit du second ordre.

1.1.2 Équation d'Euler-Lagrange

Rappelons [6] que la fonctionnelle S est différentiable si l'on a

$$S[\gamma + h] - S[\gamma] = F + R,$$

où F est la différentielle de S avec $F(\alpha h_1 + \beta h_2) = \alpha F(h_1) + \beta F(h_2)$ (c.-à-d., F dépend linéairement de h), et $R(h, \gamma) = O(h^2)$ (c.-à-d., $|h| < \varepsilon$ et $\left| \frac{dh}{dt} \right| < \varepsilon$ impliquent $|R| < C\varepsilon^2$ où C est une constante). On dit aussi que F (resp. h) est une variation de la fonctionnelle S (resp. la courbe γ).

Notons que

$$\begin{aligned} S[\gamma + h] - S[h] &= \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L}(x + h, \dot{x} + \dot{h}, t) - \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)) dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt + O(h^2), \\ &\equiv F(h) + R. \end{aligned}$$

Or une intégration par parties, fournit l'expression

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} h \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} h \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} dt,$$

et dès lors, la différentielle $F(h)$ de la fonctionnelle (1.1) est donnée par

$$F(h) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Une courbe γ qui annule la différentielle de la fonctionnelle S (1.1) restreinte aux courbes d'extrémités fixées est dite extrémale du problème variationnelle associé au lagrangien \mathcal{L} .

Théorème 1.4 *La courbe γ est extrémale de la fonctionnelle S (1.1) si et seulement si*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0. \quad (1.2)$$

Démonstration : La condition est suffisante d'après le calcul précédent. En effet, plus précisément on a

$$F(h) = \int_{t_1}^{t_2} h \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt,$$

car $h(t_1) = h(t_2) = 0$. La suite de la preuve utilise le lemme fondamental du calcul variationnel (lemme 1.1) qu'on applique aux fonctions,

$$f(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right),$$

et $g(t) = h(t)$, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = 0.$$

La réciproque est évidente car si cette dernière équation est satisfaite alors on a bien $F(h) = 0$, ce qui achève la démonstration. \square

En mécanique l'équation (1.2) est appelée équation de Lagrange, tandis que dans le calcul des variations elle est dite équation d'Euler. On dira indifféremment équation de Lagrange, équation d'Euler ou encore équation d'Euler-Lagrange.

Dans un domaine suffisamment petit entourant deux points d'une surface Σ , on appelle géodésique une ligne qui réalise le plus court chemin entre ces deux points. Ainsi, dans le plan euclidien, les géodésiques sont les droites (voir exemple 1.5) et sur une sphère de rayon r les géodésiques sont les grands cercles car un arc de grand cercle de longueur inférieure à πr est plus court que tout autre arc sur la sphère ayant même extrémités (voir aussi exemple 1.6 pour une surface).

Exemple 1.5 (*Géodésique dans le plan*). Dans le plan, la longueur de l'arc de courbe d'équation $x = x(t)$ qui joint le point $A(t_1, \alpha)$ au point $B(t_2, \beta)$ est,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt.$$

L'équation d'Euler-Lagrange avec $\mathcal{L} = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ s'écrit,

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = \text{constante}.$$

Dès lors, $\dot{x} = c_1$ d'où, $x = c_1 t + c_2$ où c_1 et c_2 sont des constantes. Par conséquent, les extrémales sont des droites, le plus court chemin entre A et B est réalisé par le segment de droite AB .

Exemple 1.6 (*Géodésique sur une surface*). Dans le cas d'une surface Σ , supposons que soit donnée une représentation paramétrique en fonction des paramètres u, v . Rappelons brièvement que pour une fonction vectorielle de deux variables u, v , l'extrémité M d'un vecteur lié OM décrit une surface Σ . Dans un repère $Oxyz$, on a $OM = xe_1 + ye_2 + ze_3$ où e_1, e_2, e_3 sont des vecteurs unitaires des axes. Les équations paramétriques de Σ sont données par les relations : $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)$. D'ailleurs, une surface paramétrique admet une infinité de représentations paramétriques de ce type et les propriétés géométriques de la surface sont indépendantes du mode de représentation paramétrique adopté. Si les conditions d'application du théorème des fonctions implicites (notamment si le déterminant jacobien $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} \neq 0$) sont satisfaites, on peut résoudre les deux premières équations paramétriques ci-dessus et on obtient les expressions suivantes : $u = u(x, y), v = v(x, y)$. En outre, en tenant compte de la troisième équation paramétrique, on obtient l'équation de la surface Σ , $z = \varphi(x, y)$ ou sous forme implicite sous la forme, $\Phi(x, y, z) = 0$. Par ailleurs, on peut écrire la surface sous la forme suivante :

$$r(u, v) = x(u, v)e_1 + y(u, v)e_2 + z(u, v)e_3,$$

et on spécifie une courbe sur cette surface. Nous définissons une courbe sur cette surface en décrivant u et v en termes d'un seul paramètre t de sorte que : $u = u(t)$ et $v = v(t)$. Notons que le vecteur,

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \frac{dr}{du} \dot{u} + \frac{dr}{dv} \dot{v},$$

est tangent à la courbe et à la surface aussi. L'élément d'arc ds (le carré de la distance entre deux points sur une courbe) s'exprime par,

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr \cdot dr, \\ &= \left(\frac{dr}{du} du + \frac{dr}{dv} dv \right) \left(\frac{dr}{du} du + \frac{dr}{dv} dv \right), \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \end{aligned}$$

où

$$E = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial r}{\partial v}.$$

La distance entre deux points sur la courbe : $u = u(t), v = v(t)$ est fournie par l'expression,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt.$$

On peut exprimer cette intégrale sous une autre forme. Dès lors, rechercher le plus court chemin sur la surface Σ entre deux points $A(u = t_1, v = v_1)$ et

$B(u = t_2, v = v_2)$ revient à chercher la fonction $v = v(u)$ qui rende minimale l'intégrale,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2} du,$$

et qui prenne pour t_1 la valeur v_1 et pour t_2 la valeur v_2 . L'équation d'Euler-Lagrange qui en résulte fournit l'équation différentielle des géodésiques,

$$\frac{d}{du} \frac{F + G\dot{v}}{\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}} = \frac{\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial G}{\partial v}\dot{v}^2}{2\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}}.$$

Nous verrons dans la section 1.6, d'autres exemples intéressants notamment le problème de la brachistochrone ainsi que le problème isopérimétrique.

1.2 Transformations de Legendre

La transformation Legendre, définie ci-dessous, est souvent utilisée pour transformer une fonction d'une variable en une autre fonction (d'une nouvelle variable différente) mais contenant les mêmes informations que la fonction de départ. Grosso modo, il s'agit d'une opération qui transforme une fonction définie par sa valeur en un point en une fonction définie par sa tangente. Nous verrons qu'à l'aide d'une transformation de Legendre, on peut associer aux équations de Lagrange (1.2) qui sont des équations du second ordre, un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre appelé équations canoniques de Hamilton. Mais avant cela, rappelons tout d'abord ce qu'est une transformation de Legendre.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, une fonction de classe \mathcal{C}^1 et convexe, (avec $f''(x) > 0$). La transformation de Legendre de f est une fonction $g(s)$ d'une nouvelle variable s définie comme suit : considérons dans le plan des (x, y) , le graphe de f ainsi que la droite d'équation $y = sx$, $s \in \mathbb{R}$ (un point donné). On considère le point $x = x(s)$ où la courbe est la plus éloignée de la droite $y = sx$ par rapport à la direction de l'axe des y . Pour chaque s la fonction définie par

$$F(s, x) \equiv sx - f(x),$$

possède un maximum par rapport à x au point $x(s)$. En ce point (s'il existe, il est unique puisque f est convexe), on a

$$\frac{\partial F}{\partial x} = s - f'(x) = 0,$$

et la tangente $y = f'(x)$ est parallèle à la droite $y = sx$. Dès lors, on définit la fonction $g(s)$ en posant

$$g(s) = F(s, x(s)) = \max_x (sx - f(x)).$$