Oraux corrigés et commentés

Concours PC-PC*

2e édition

Maths

- ENS
- X-ESPCI
- Mines
- Centrale
- Mines-Télécom
- CCINP

Sujets types

ellipses

Éric Billault

Chapitre n° 1

Algèbre générale

ENS

Oral n° 1

THÈME : POLYNÔME COMPLEXE, PRINCIPE DU MAXIMUM

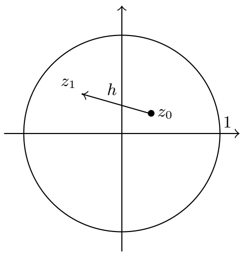
On note $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leqslant 1\}$ et $\partial D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$. Montrer que

$$\max_{z \in D} |P(z)| = \max_{z \in \partial D} |P(z)|$$

Commentaires

La démonstration repose sur un raisonnement par l'absurde. On suppose que le maximum (qui existe) est atteint en un point z_0 intérieur au disque. En choisissant judicieusement une direction, on trouve un point $z_1 = z_0 + h$ du disque unité ouvert tel que $|P(z_1)| > |P(z_0)|$.

Remarquons que la continuité de $z \mapsto |P(z)|$ sur la partie fermée et bornée D assure l'existence du maximum.
Si le polynôme P est constant alors la propriété est trivialement vérifiée. On suppose que P est non constant.
Supposons que le maximum soit atteint en un point z_0 intérieur au disque D. Soit h un complexe non nul. Posons $z_1 = z_0 + h$.



En notant n le degré de P, on a par la formule de Taylor pour les polynômes :

$$P(z_1) = P(z_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} h^k = P(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} h^k$$

Posons pour tout $k \geqslant 1$, $a_k = \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!}$. Si tous les a_k sont nuls alors P est constant. Il existe donc a_r tel que a_r est le premier coefficient a_k non nul pour $k \geqslant 1$. Avec ces notations, nous avons

$$P(z_1) = P(z_0) + a_r h^r + h^{r+1} \underbrace{\left(a_{r+1} + \ldots + a_n h^{n-r-1}\right)}_{=\varphi(h)}$$

ou encore

$$P(z_0) + a_r h^r = P(z_1) - h^{r+1}\varphi(h)$$

Par inégalité triangulaire :

$$|P(z_0) + a_r h^r| \leqslant |P(z_1)| + \left|h^{r+1}\varphi(h)\right|$$

donc

$$|P(z_0) + a_r h^r| - \left|h^{r+1}\varphi(h)\right| \leqslant |P(z_1)|$$

Écrivons les formes exponentielles des complexes $P(z_0) = a\,\mathrm{e}^{i\alpha}$, $a_r = b\,\mathrm{e}^{i\beta}$ et $h = |h|\,\mathrm{e}^{i\theta}$. (Notons que $P(z_0)$ est non nul sinon P est nul.) Ainsi,

$$\begin{aligned}
|P(z_1)| &\geqslant \left|a\,\mathrm{e}^{i\alpha} + b|h|^r\,\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta)}\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)| \\
&\geqslant \left|\mathrm{e}^{i\alpha}\left(a + b|h|^r\,\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta-\alpha)}\right)\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)| \\
&\geqslant \left|a + b|h|^r\,\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta-\alpha)}\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)|
\end{aligned}$$

On choisit θ tel que $\beta + r\theta - \alpha = 0\,[2\pi]$ de sorte que $\mathrm{e}^{i(\beta+r\theta-\alpha)} = 1$. Ainsi,

$$|P(z_1)| \geqslant \left|a + b|h|^r\right| - |h|^{r+1}|\varphi(h)| = a + b|h|^r - |h|^{r+1}|\varphi(h)| = a + |h|^r(b - |h||\varphi(h)|)$$

Maintenant, on choisit $|h|$ suffisamment petit de telle sorte que d'une part $|h||\varphi(h)| < b$ et d'autre part le point $z_1 = z_0 + h$ soit à l'intérieur de D. On a alors

$$|P(z_1)| > a = |P(z_0)|$$

ce qui est contradictoire avec la définition de z_0.

Commentaires

Nous avons montré en fait que si P est un polynôme complexe non constant, il n'a pas de maximum local à l'intérieur du disque unité.
Cette propriété s'appelle le principe du maximum. Elle s'applique plus généralement aux fonctions dites entières c'est-à-dire développables en série entière en tout point de $\mathbf{C}$.
Proposons une autre démonstration du principe du maximum pour les polynômes.
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant. Supposons par l'absurde que le maximum de $|P|$ soit atteint en un point z_0 intérieur au disque D. Écrivons dans la base des $(z - z_0)^i$:

$$P(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_n(z - z_0)^n$$

Calculons, pour $0 < r < 1 - |z_0|$ (de telle sorte que $z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in D$), l'intégrale :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|P\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta$$

En utilisant le fait que pour un complexe u, $|u|^2 = u\overline{u}$:

$$\left|P\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right|^2 = \left|b_0 + b_1 r\,\mathrm{e}^{i\theta} + \ldots + b_n r^n\,\mathrm{e}^{in\theta}\right|^2$$
$$= (b_0 + b_1 r\,\mathrm{e}^{i\theta} + \ldots + b_n r^n\,\mathrm{e}^{in\theta})(\overline{b_0} + \overline{b_1} r\,\mathrm{e}^{-i\theta} + \ldots + \overline{b_n} r^n\,\mathrm{e}^{-in\theta}).$$

Par développement et linéarité de l'intégrale, $I(r)$ apparaît comme une combinaison linéaire d'intégrales du type

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ik\theta}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}.$$

On en déduit que

$$I(r) = |b_0|^2 + r^2|b_1|^2 + \ldots + r^{2n}|b_n|^2$$

Mais comme pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\left|P\left(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\right| \leqslant |P(z_0)| = b_0$:

$$I(r) = |I(r)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |b_0|^2 = |b_0|^2$$

On a donc, pour $0 < r < 1 - |z_0|$,

$$|b_0|^2 + r^2|b_1|^2 + \ldots + r^{2n}|b_n|^2 \leqslant |b_0|^2$$

ce qui impose que $b_k = 0$ pour $k \geqslant 1$ donc que le polynôme P est constant ce qui est contradictoire.

Oral n° 2

THÈME : POLYNÔME COMPLEXE

Résoudre dans $\mathbf{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = P(X)^2$.

- On constate que les monômes X^n vérifie l'équation.
- Montrons que les monômes sont les seules solutions de cette équation.

  Soit P un polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$.

  $$P(X) = \ldots + a_n X^n$$

  avec $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de P, $n \in \mathbf{N}^*$ le degré de P et les pointillés désignant des monômes de degré $< n$.

  Supposons qu'il existe des monômes avant le monôme de plus haut degré. On note $a_m X^m$ le monôme qui précède le monôme de plus haut degré :

  $$P(X) = \ldots + a_m X^m + a_n X^n$$

  On a alors

  $$P(X^2) = \ldots + a_m X^{2m} + a_n X^{2n}$$

  et

  $$P(X)^2 = \ldots + a_m^2 X^{2m} + 2a_n a_m X^{n+m} + a_n^2 X^{2n}$$

  On en déduit que $a_n = a_n^2$ soit $a_n = 1$. Comme $2m < n + m < 2n$ car $m < n$ et qu'il n'y a pas de monôme de degré $n + m$ dans $P(X^2)$, $a_m = 0$. Donc le monôme $a_m X^m$ n'existe pas. Autrement dit, $P = X^n$.

Les solutions de l'équation sont tous les monômes unitaires.

Oral n° 3

Thème : polynôme, multiplicité des racines

Soit

$$E = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \forall x \in \mathbf{R}, P(x) \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad F = \{A^2 + B^2 \mid (A, B) \in \mathbf{R}[X]^2\}$$

1. Montrer que $F \subset E$.
2. Montrer que F est stable par produit.
3. Soit $P \in E$. Que dire du degré de P ? Que dire des multiplicités des racines réelles de P ?
4. Montrer que $E = F$.
5. Soit E' l'ensemble des polynômes P tels que P est positif ou nul sur le segment $[a, b]$. Soit F' l'ensemble des polynômes de la forme

$$(X - a)P + (b - X)Q + (X - a)(b - X)R + S$$

avec $(P, Q, R, S) \in E^4$. Montrer que $E' = F'$.

1. Soit $P \in F$. Il existe $(A, B) \in \mathbf{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$. Pour tout réel x, $P(x) = A^2(x) + B^2(x) \geqslant 0$. Donc $P \in E$.
2.

Commentaires

Indication : l'expression $A^2 + B^2$ est une identité remarquable dans $\mathbf{C}[X]$!

Soit $(P, Q) \in F$. Il existe $(A, B, C, D) \in \mathbf{R}[X]^4$ tel que $P = A^2 + B^2$ et $Q = C^2 + D^2$. On a dans $\mathbf{C}[X]$:

$$\begin{aligned} PQ &= (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (A + iB)(A - iB)(C + iD)(C - iD) \\ &= (A + iB)(C + iD)(A - iB)(C - iD) \\ &= \big[(AC - BD) + i(BC + AD)\big]\big[(AC - BD) - i(BC + AD)\big] \\ &= (AC - BD)^2 + (BC + AD)^2 \in F \end{aligned}$$

Ainsi, F est stable par produit.

Dans les questions suivantes, on considère un polynôme de degré $\geqslant 1$. Les polynômes constants de E s'écrivent bien sous la forme de la somme de deux carrés car si $P = c \in E$, $P = \sqrt{c}^2 + 0^2$.

3. Soit $P \in E \setminus \mathbf{R}_0[X]$. Au voisinage de $\pm\infty$, $P(x) \underset{}{\overset{x \to \pm\infty}{\sim}} \mu x^d$ avec $\mu \in \mathbf{R}^*$ le coefficient dominant de P et $d = \deg(P)$. Comme P est positif, $\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = +\infty$ donc $\mu > 0$ et d est un entier pair.

   Soit α une racine réelle de P de multiplicité m ($m \in \mathbf{N}^*$). Il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha)^m Q(X)$. Supposons que m soit impair de sorte que le signe de $(x - \alpha)^m$ est celui de $x-\alpha$. Comme P est positif, cela impose que Q est positif sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ et négatif sur l'intervalle $]-\infty, \alpha]$. Comme Q est continue, on a $\lim_{x\to\alpha} Q(x) = Q(\alpha)$. D'après les considérations sur le signe de Q, on en déduit que $Q(\alpha) \geqslant 0$ et $Q(\alpha) \leqslant 0$ donc $Q(\alpha) = 0$ ce qui est contredit la multiplicité de α. Donc m est pair.

4. Compte tenue de la question précédente, la factorisation de P dans $\mathbf{C}[X]$ s'écrit

$$P = \mu \prod_{k=1}^{p} (X-\alpha_k)^{2m_k} \prod_{k=1}^{q} (X-\beta_k)^{n_k} (X-\overline{\beta_k})^{n_k}$$

où α_k sont les racines réelles de multiplicité paire $2m_k$ et β_k et $\overline{\beta_k}$ les racines complexes non réelles de multiplicité n_k.

Commentaires

Comme P est un polynôme à coefficients réels, ses racines complexes non réelles sont deux à deux conjuguées entre elles et de même multiplicité.

Réordonnons les facteurs :

$$\begin{aligned} P &= \mu \underbrace{\prod_{k=1}^{p} (X-\alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{q} (X-\beta_k)^{n_k}}_{:=R(X)} \prod_{k=1}^{p} (X-\alpha_k)^{m_k} \prod_{k=1}^{q} (X-\overline{\beta_k})^{n_k} \\ &= \mu R\overline{R} = \sqrt{\mu}R\overline{\sqrt{\mu}R} = |\sqrt{\mu}R|^2 = \mathfrak{Re}(\sqrt{\mu}R)^2 + \mathfrak{Im}(\sqrt{\mu}R)^2 \end{aligned}$$

On a donc prouvé que $P \in F$ d'où l'inclusion $E \subset F$ puis l'égalité $E = F$.

5.

Commentaires

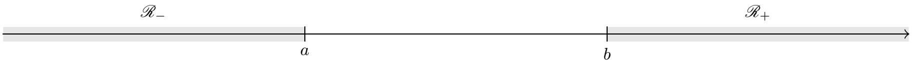
Dans cette question il faut considérer les racines réelles appartenant à l'intervalle $]a, b[$ et celles qui sont à l'extérieur de cet intervalle.

On vérifie facilement que $F' \subset E'$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $P \in E'$. Si P est constant, c'est évident. Supposons $\deg(P) \geqslant 1$. Soit α une racine réelle de P dans $]a, b[$ de multiplicité m : $P = (X-\alpha)^m Q$. Si on suppose que m est impair, comme dans la question précédente, la positivité de P sur $[a, b]$ implique que $Q(\alpha) = 0$ ce qui n'est pas possible. On en déduit que les éventuelles racines de P dans l'intervalle $]a, b[$ ont toutes une multiplicité paire. On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des racines réelles à l'extérieur de $]a, b[$. La factorisation de P dans $\mathbf{R}[X]$ s'écrit

$$P = \mu \prod_{\alpha\in\mathscr{R}} (X-\alpha)^{m_\alpha} \underbrace{\prod_{\alpha\notin\mathscr{R}} (X-\alpha)^{m_\alpha} \prod_{k=1}^{q} (X^2 + b_k X + c_k)}_{:=S}$$

où m_α désigne la multiplicité de α et $X^2 + b_k X + c_k$ est un trinôme à discriminant strictement négatif. Ces trinômes ont un signe constant sur $\mathbf{R}$, comme ils tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, ils sont positifs sur $\mathbf{R}$. Pour $\alpha \notin \mathbf{R}$, m_α est un entier pair donc le polynôme $\prod_{\alpha\notin\mathscr{R}} (X-\alpha)^{m_\alpha}$ est positif sur $\mathbf{R}$. On en déduit que $S \in E$.

On scinde $\mathscr{R}$ en deux sous-ensembles disjoints : $\mathscr{R} = \mathscr{R}_- \uplus \mathscr{R}_+$ avec $\mathscr{R}_-$ (respectivement $\mathscr{R}_+$) l'ensemble des racines de P appartenant à l'intervalle $]-\infty, a]$ (respectivement $[b, +\infty[$).



On a

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} (X-\alpha)^{m_\alpha} = \prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} \big(X - a + (a-\alpha)\big)^{m_\alpha}$$

Comme $a - \alpha \geqslant 0$, en développant ce produit, on obtient une expression du type

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} (X-\alpha)^{m_\alpha} = \sum_{k=0}^{n_1} \gamma_k (X-a)^k$$

avec des coefficients γ_k positifs.

> **Commentaires**
>
> On n'a pas besoin d'expliciter ces coefficients γ_k ; seule leur positivité nous importe.

On sépare cette somme en deux selon la parité de l'indice k :

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} (X-\alpha)^{m_\alpha} = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\lfloor n_1/2\rfloor} \gamma_{2\ell}(X-a)^{2\ell}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}} + (X-a) \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n_1-1)/2\rfloor} \gamma_{2\ell+1}(X-a)^{2\ell}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}}$$

On a donc

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_-} (X-\alpha)^{m_\alpha} = A + (X-a)B \quad \text{avec } (A,B) \in E^2$$

On fait le même travail avec le produit portant sur les racines de $\mathscr{R}_+$:

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_+} (X-\alpha)^{m_\alpha} = \prod_{\alpha\in\mathscr{R}_+} (-1)^{m_\alpha}(\alpha - X)^{m_\alpha} = (-1)^s \prod_{\alpha\in\mathscr{R}_+} \big((\alpha-b) + (b-X)\big)^{m_\alpha}$$

avec $s = \sum_{\alpha\in\mathscr{R}_+} m_\alpha$.

Comme $\alpha \geqslant b$, les différences $\alpha - b$ sont positives. En développant le produit, on obtient :

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{R}_+} (X-\alpha)^{m_\alpha} = (-1)^s \sum_{k=0}^{n_2} \gamma'_k (b-X)^k$$

avec $\gamma'_k \geqslant 0$. On sépare en deux sommes selon la parité de l'indice :

$$\sum_{k=0}^{n_2} \gamma'_k (b-X)^k = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\lfloor n_2/2\rfloor} \gamma'_{2\ell}(b-X)^{2\ell}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}} + (b-X) \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\lfloor (n_2-1)/2\rfloor} \gamma'_{2\ell+1}(b-X)^{2\ell}}_{\geqslant 0 \text{ sur } \mathbf{R}}$$

On a donc

$$\prod_{\alpha \in \mathscr{R}_+} (X-\alpha)^{m_\alpha} = (-1)^s \big(C + (b-X)D\big) \quad \text{avec } (C,D) \in E^2$$

Le polynôme P s'écrit alors

$$P = \mu(-1)^s \left[A + (X-a)B\right] \left[C + (b-X)D\right] S$$

Sur le segment $[a,b]$, $P \geqslant 0$ et $[A+(x-a)B]\,[C+(b-x)]$ est positif donc $\mu(-1)^s > 0$. En distribuant $\mu(-1)^s S$, on a

$$P = \left[A_1 + (X-a)B_1\right] \left[C_1 + (b-X)D_1\right] \quad \text{avec } (A_1,B_1,C_1,D_1) \in E^4$$

puis en développant :

$$P = (X-a)E + (b-X)F + (X-a)(b-X)G + H$$

avec $(E,F,G,H) \in E^4$.